

Il dilemma del prigioniero

John Nash e la Teoria dei Giochi

Problema

- *Due sospettati, A e B, sono stati arrestati dalla polizia. La polizia non ha prove sufficienti per trovare il colpevole e, dopo aver rinchiuso i due prigionieri in due celle diverse, interroga entrambi offrendo loro le seguenti prospettive: se uno confessa (C) e l'altro non confessa (NC) chi non ha confessato sconterà 10 anni di detenzione mentre l'altro sarà libero; se entrambi non confesseranno, allora la polizia li condannerà ad 1 solo anno di carcere; se, invece, confesseranno entrambi la pena da scontare sarà pari a 5 anni di carcere. Ogni prigioniero può riflettere sulla strategia da scegliere tra confessare o non confessare. In ogni caso, nessuno dei due prigionieri potrà conoscere la scelta fatta dall'altro prigioniero.*

Ora tocca a voi...

- Come si comporteranno i due prigionieri? Cosa conviene loro fare?
- Conviene loro confessare o non confessare? Oppure lanciare una moneta per decidere?

Approfondiamo un po' ...

- Il Dilemma del Prigioniero è un classico esempio della Teoria dei Giochi. Chiariamo, innanzitutto, cosa sia, in realtà, un gioco: la Teoria dei Giochi considera tali le situazioni in cui i giocatori prendono “decisioni strategiche”, cioè decisioni in cui ciascun giocatore tiene conto delle azioni e delle reazioni di ognuno degli altri.
- Un primo distinguo è da operare tra “giochi cooperativi” e “giochi non-cooperativi”. Sono considerati “giochi cooperativi” quei giochi in cui i partecipanti possono accordarsi in modo tale da programmare strategie congiunte. Sono considerati, invece, “giochi non-cooperativi” quelli in cui non è possibile, da parte dei giocatori, accordarsi preventivamente per adottare la strategia più vantaggiosa per entrambi.

Dilemma del prigioniero

- Il Dilemma del Prigioniero è un gioco NON-cooperativo, infatti i due prigionieri sono stati interrogati separatamente, non avendo potuto accordarsi preventivamente né potendo mai venire a conoscenza della strategia adottata dall'altro giocatore/prigioniero.
- Il modo più comodo per rappresentare il Dilemma del prigioniero è la “Matrice dei Payoff”, ovvero una matrice che rappresenta i payoff generati dalle decisioni strategiche dei giocatori. I Payoff non solo altro che gli esiti del gioco e rappresentano i benefici che deriveranno all'uno e all'altro giocatore in funzione della giocata. Un importante obiettivo della Teoria dei Giochi è, ovviamente, la determinazione della strategia ottimale di ogni giocatore, ovvero di quella strategia che massimizza il suo payoff atteso.

Dilemma del prigioniero

| Prigioniero A/ Prigioniero B | Confessa | Non confessa |
|---|-----------------|---------------------|
| Confessa | (-5,-5) | (0,-10) |
| Non confessa | (-10,0) | (-1,-1) |

:

Dilemma del prigioniero

- I prigionieri sono di fronte ad un dilemma. Se entrambi fossero in grado di concordare di non confessare (in un modo che sia vincolante), allora ciascuno verrebbe condannato ad 1 solo anno di carcere. Ma essi non possono comunicare e, anche se potessero farlo, potrebbero fidarsi l'uno dell'altro?
- Trattandosi di un gioco non-cooperativo, per ogni prigioniero è “meglio” confessare perché, indipendentemente dalla scelta dell'altro giocatore, il suo payoff (beneficio, guadagno) è più alto confessando.
- Il primo ad essere interrogato è il prigioniero A, per il quale è meglio confessare proprio perché in questo modo sconterebbe 5 anni invece che 10 o 0 anni piuttosto che uno solo.

Dilemma del prigioniero

- Ora, indipendentemente dalla giocata di A, anche per B sarà più conveniente confessare.
- Infatti: se A avesse confessato, a B converrebbe confessare perché in questo modo sconterebbero entrambi 5 anni di carcere; se A non avesse confessato, a B converrebbe a maggior ragione confessare perché così facendo lui sarebbe libero, mentre A sconterebbe 10 anni di carcere.
- **L'equilibrio del gioco è posto dunque in C-C:** i due prigionieri sconteranno entrambi 5 anni di carcere. Questa situazione di equilibrio, pur essendo quella razionale, tuttavia non rappresenta la migliore delle situazioni possibili.

Dilemma del prigioniero

- Secondo la Teoria dei Giochi, la scelta di confessare (C) operata dai due prigionieri alla luce del precedente ragionamento è detta “strategia dominante”: essa è infatti definita come la strategia ottimale indipendentemente da ciò che fa l'avversario.
- Tuttavia, appare evidente come in realtà sarebbe molto più conveniente per entrambi i prigionieri non confessare (NC-NC), poiché così facendo sconterebbero entrambi soltanto 1 anno di detenzione. Ma questa giocata risulta estremamente rischiosa, poiché se l'avversario confessasse (come è razionale che faccia) allora chi non ha confessato sconterebbe ben 10 anni di carcere, mentre l'avversario sarebbe libero.

Dilemma del prigioniero

- L'unica variante che renderebbe vantaggioso per entrambi NC è che si tratti di un **gioco cooperativo**, ovvero che i due giocatori abbiano la possibilità di accordarsi preventivamente sulla strategia da adottare. Ma anche in questo caso, anzi, soprattutto in questo caso, la tentazione di non cooperare (e dunque di confessare) sarebbe ancora maggiore, poiché così facendo (certi del fatto che l'avversario cooperante giocherà NC) il prigioniero "leale" starà in carcere 10 anni, mentre il prigioniero "traditore" (che non ha rispettato l'accordo preventivo) sarà immediatamente libero.

Tiriamo le somme...

- Se si gioca una singola partita la strategia ottimale per entrambi è optare per la strategia dominante e dunque confessare.
- La situazione di equilibrio posta in C-C è detta **“Equilibrio in strategie dominanti”**.
- E' utile sottolineare come l'equilibrio in strategie dominanti sia un caso particolare dell'**Equilibrio di Nash** (dal nome del matematico John Forbes Nash, premio Nobel per l'economia nel 1994, che per primo spiegò questo concetto nel 1951).

John Nash

- *«Il concetto di equilibrio di Nash è forse l'idea più importante nella teoria dei giochi non cooperativi. [...] Sia che analizziamo le strategie di elezione dei candidati, le cause della guerra, la manipolazione degli ordini del giorno nelle legislature, o le azioni delle lobby, le previsioni circa gli eventi si riducono ad una ricerca o ad una descrizione degli equilibri. In termini più semplici, le strategie di equilibrio sono ciò che prevediamo delle persone» (Peter Ordeshook, collega di Nash)*

Dilemma del prigioniero

- Equilibrio in strategie dominanti:
 1. Io faccio meglio che posso indipendentemente da ciò che fai tu.
 2. Tu fai meglio che puoi indipendentemente da ciò che faccio io.
- Equilibrio di Nash:
 1. Io faccio meglio che posso dato ciò che fai tu.
 2. Tu fai meglio che puoi dato ciò che faccio io.

Dilemma del prigioniero

- Il dilemma del prigioniero ha causato interesse come esempio di gioco in cui *l'assioma di razionalità* pare apparentemente fallire, prescrivendo un'azione che procura più danno ad entrambi i contendenti della scelta alternativa NC-NC. Gli studiosi di teoria dei giochi fanno notare che chi la pensa in questo modo probabilmente si immagina un gioco diverso, in cui la vittoria viene valutata sulla somma degli anni di carcere.

| prigioniero A / prigioniero B | Confessa | Non confessa |
|-------------------------------|----------|--------------|
| Confessa | 5+5 | 0+10 |
| Non confessa | 10+0 | 1+1 |

Dilemma del prigioniero

- Questo nuovo gioco ha come equilibrio **NC-NC**, ovvero la scelta che conduce al miglior risultato possibile per entrambi.
- Questa seconda formulazione (sommando gli anni di carcere) prevede che il prigioniero debba preferire il danno minore per la coppia ma non è questo il suo obiettivo nella formulazione originaria. In quella si suppone sia interessato solo ai rischi che corre personalmente.
- A questo punto ci si potrebbe domandare:
 1. "È possibile che non esista nessuna conclusione logica che permetta al prigioniero di sperare di rimanere in prigione un solo anno o addirittura nessuno?"
 2. "È possibile che la logica non giunga a nessun'altra soluzione oltre alla accettazione di venire condannati a 5 anni senza alcuna speranza?"

Dilemma del prigioniero

- Una possibile soluzione è la seguente, ma non è universalmente accettata:
 1. Si deve dare per scontato che *tutti* i personaggi abbiano una capacità logica pressoché perfetta. Questo non vuol dire che debbano essere buoni, altruisti o altro, ma solo che *tutti* capiscano il gioco allo stesso modo, e non facciano alcun errore;
 2. Fatta questa premessa, *tutti prenderanno la stessa decisione*. Non può esistere uno che fa il furbo a scapito degli altri, perché questo automaticamente vorrebbe dire che anche gli altri faranno come lui.
- A questo punto *appare chiaro che, se uno dei prigionieri capisce che le conclusioni a cui arriva lui sono le stesse a cui arriva l'altro, scegliere NC è l'unica azione possibile.*

E con la moneta?

- Infatti se ci si convince che è impossibile che i prigionieri diano risposte diverse allora il discorso *egoista* cade. Rimanendo solamente le possibilità C-C e NC-NC la scelta è a prova di dubbio: è meglio non confessare.
- Se invece tutti e due tirassero una moneta avrebbero comunque più possibilità di fare poco carcere piuttosto che utilizzare la «*strategia furba*»; infatti:
 1. Scelta furba (C-C): 100% di prendere 5 anni;
 2. Con la moneta: 25% di prendere 10 anni, 25% di prendere 5 anni, 25% di prendere 1 anno, 25% di essere libero.

Dilemma del prigioniero

- Nella scelta con la moneta è chiaro che la situazione è migliore per entrambi ($0.25 \times 10 + 0.25 \times 5 + 0.25 \times 1 + 0.25 \times 0 = 4$ anni di media di carcere). Abbiamo a favore un buon 75% dei casi: nel 50% dei casi la pena verrà diminuita sensibilmente di 9 oppure 10 anni (in quest'ultimo caso sarà addirittura azzerata), e nel 25% dei casi invece rischieremmo di ottenere la stessa pena che avremmo giocando da *furbi*.
- Apparirebbe dunque un paradosso, essendo una scelta migliore lanciare una moneta piuttosto che applicare la logica.

Dilemma del prigioniero

- D'altra parte, tirare una moneta non è una scelta conveniente per un giocatore razionale, a meno di un accordo vincolante che obblighi entrambi a tirare la moneta; a quel punto, però, meglio ancora sarebbe un accordo vincolante che obbligasse entrambi a tacere, cioè a non confessare.
- Nel caso in cui uno dei due tirasse la moneta e l'altro effettuasse una scelta "furba", infatti, sapendo che l'altro ha tirato la moneta ma senza conoscere l'esito del tiro, la situazione spingerebbe comunque il secondo a confessare: infatti in questo modo nel 50% dei casi prenderebbe 0 anni rispetto a 1 (se l'altro non confessava) e nel 50% dei casi 5 anni rispetto a 10 (se l'altro confessava).
- L'apparente paradosso dunque non sussiste e un giocatore razionale, in assenza di accordi vincolanti, sceglierà sempre di confessare.