Alcune Costanti Fisiche

Valori arrotondati, con errore relativo minore di 10^{-5}, da considerare **esatti**

COSTANTE	SIMBOLO	VALORE	UNITÀ
Velocità della luce nel vuoto	c	2.9979×10^{8}	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Carica elementare	e	1.60218×10^{-19}	C
Massa dell'elettrone	m_e	9.1094×10^{-31}	kg
		$= 5.1100 \times 10^{2}$	$\mathrm{keV}\,c^{-2}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	8.8542×10^{-12}	$\mathrm{F\,m^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	1.25664×10^{-6}	$\mathrm{H\,m^{-1}}$
Massa del protone	m_p	1.67262×10^{-27}	kg
		$= 9.3827 \times 10^{2}$	$\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
Costante di Planck	h	6.6261×10^{-34}	$\mathrm{J\,s}$
Costante universale dei gas	R	8.3145	$\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
Costante di Avogadro	N	6.0221×10^{23}	$\mathrm{mol^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k	1.38065×10^{-23}	$\mathrm{J\,K^{-1}}$
Costante di Faraday	F	9.6485×10^{4}	$\mathrm{C\,mol^{-1}}$
Costante di Stefan–Boltzmann	σ	5.6704×10^{-8}	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Costante gravitazionale	G	6.674×10^{-11}	$\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Pressione atmosferica standard	p_0	1.01325×10^{5}	Pa
Temperatura standard (0°C)	T_0	273.15	K
Volume molare di un gas perfetto in condizioni standard (p_0, T_0)	V_m	2.2414×10^{-2}	$\mathrm{m^3\,mol^{-1}}$
Unità di massa atomica	u	1.66054×10^{-27}	kg

Altri dati che possono essere necessari

Valori arrotondati, con errore relativo minore di 10^{-5}, da considerare **esatti**.
Per semplicità – salvo che non sia detto esplicitamente – questi dati, quando riferiti ad una specifica temperatura, si potranno utilizzare anche ad altre temperature senza errori importanti.

Accelerazione media di gravità	g	9.8067	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Densità dell'acqua (a 4°C)	ρ_a	1.000×10^{3}	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$
Calore specifico dell'acqua (a 20°C)	c_a	4.182×10^{3}	$\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$
Calore di fusione dell'acqua	λ_f	3.335×10^{5}	$\mathrm{J\,kg^{-1}}$
Calore di vaporizzazione dell'acqua (a 100°C)	λ_v	2.257×10^{6}	$\mathrm{J\,kg^{-1}}$

LEGGI CON CALMA E MOLTA ATTENZIONE!

È assolutamente necessario ricordarsi di NON scrivere il proprio nome su nessun foglio (ad esclusione del cartoncino che va chiuso nella busta piccola, come detto in copertina). Si dovrà invece SCRIVERE solo il proprio **Codice Studente** (riportato sulla busta piccola colorata) su ciascun **Foglio Riassuntivo** e su ogni foglio a quadretti utilizzato.

Insieme ai testi, per ogni problema ti è stato consegnato un **Foglio Riassuntivo** sul quale dovrai riportare in modo sintetico le risposte ad ogni domanda; i valori numerici devono essere scritti con il corretto numero di cifre, in relazione ai dati forniti e – se necessario – con indicazione dell'unità di misura.

È ESSENZIALE che tutti i risultati (formali e numerici) che hai trovato per ciascun problema siano riportati sul corrispondente **Foglio Riassuntivo**, poiché questo costituisce la base della valutazione della tua prova.

Ricordati di usare un foglio a quadretti diverso per ogni problema e di scrivere per prima cosa, in alto a destra, il tuo **Codice Studente**!

Sui fogli a quadretti devono essere riportate le soluzioni dettagliate, cercando di limitare il testo scritto e di privilegiare invece equazioni, simboli, numeri e diagrammi.

Su ogni facciata dei fogli a quadretti con la soluzione di un problema va sempre scritto, in alto a destra, il numero del problema, il numero di pagina e il numero totale di pagine utilizzate per quel problema, come descritto in copertina.

NOTA importante sui DATI NUMERICI: I dati numerici forniti nei singoli problemi, qualunque sia il numero di cifre con cui vengono scritti, si devono considerare noti con un'incertezza dello $0.1\,\%$, salvo esplicita indicazione contraria. Le costanti fornite nella tabella generale si possono invece considerare note con incertezza trascurabile. Di conseguenza si scrivano i risultati numerici, quando richiesti, con un numero di cifre appropriato all'incertezza del risultato stesso.

P1 Miraggio parabolico

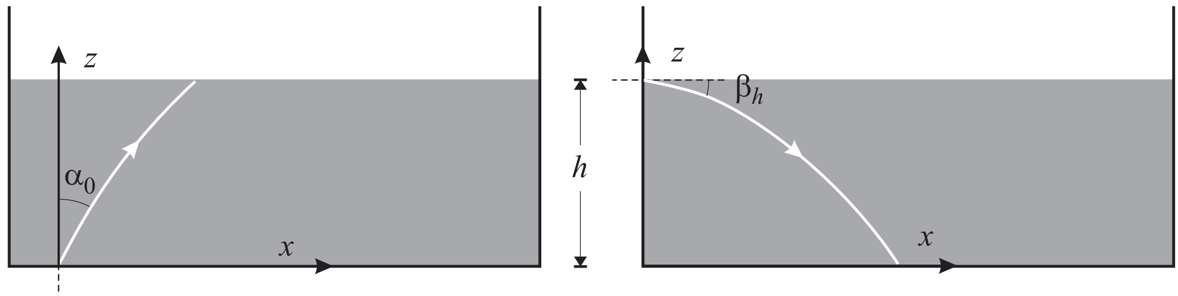
Punti 100

Quando al di sopra di un piano orizzontale la temperatura varia con la quota, restando uniforme ad una stessa altezza dal suolo, anche l'indice di rifrazione dell'aria varia e ciò fa sì che i raggi luminosi siano deviati da un percorso rettilineo, dando luogo al ben noto fenomeno del miraggio.

Sarà studiato qui un fenomeno analogo. Si consideri un fascio di luce laser che entra in una vaschetta con le pareti piane e trasparenti. Nella vaschetta c'è una soluzione di acqua e zucchero in cui la concentrazione diminuisce progressivamente con l'altezza z: raggiunge il valore di saturazione sul fondo del recipiente ed è praticamente nulla al livello più alto.

L'indice di rifrazione n dipende dalla concentrazione e quindi varia anch'esso con la quota, ma la funzione $n(z)$ non è nota, non essendo nota la variazione della concentrazione al variare di z: si sa solo che sul fondo il valore di n è quello di una soluzione satura di acqua e zucchero ($n_0 = 1.46$) mentre al livello più alto, dove c'è la superficie orizzontale del liquido, $n_h = 1.33$. Al di sopra c'è aria, il cui indice di rifrazione può essere approssimato con $n_\mathrm{a} = 1$.

Lo scopo di questo problema è quello di capire, adottando alcune ipotesi semplificative, il comportamento del fascio di luce.



Si inizia facendo entrare il fascio luminoso dal fondo della vaschetta, diretto dal basso verso l'alto (figura a sinistra). Sia α_0 l'angolo che il raggio forma con l'asse z appena entrato nel liquido. Si consideri un sistema cartesiano (x, z) nel piano verticale individuato dal raggio e dall'asse z, e si ponga l'origine nel punto d'ingresso (vedi figura a sinistra). A partire da questo punto il fascio luminoso devia seguendo una traiettoria non rettilinea.

1. Si trovi la deviazione angolare subita dal fascio nel liquido, dal fondo fino alla superficie superiore di separazione con l'aria, assumendo $\alpha_0 = 30°$.

2. Si trovi qual è il valore minimo che deve avere l'angolo d'ingresso se si vuole che il fascio non emerga in aria alla superficie superiore ma subisca una riflessione totale.

Come si è visto, la traiettoria del fascio di luce nella soluzione non è rettilinea, tuttavia la deviazione dalla retta è piccola: per semplicità verrà approssimata con una parabola con asse verticale nel piano (x, z), i cui parametri dipendono ovviamente dall'angolo di incidenza.

3. Si calcolino i parametri della parabola per una incidenza all'angolo limite calcolato al punto 2 supponendo che l'altezza del liquido nella vaschetta sia $h = 20\,\mathrm{cm}$. Si trovi inoltre la distanza, misurata sul fondo della vaschetta, dal punto di incidenza al punto in cui il raggio riflesso dalla superficie dell'acqua ritorna sul fondo della vaschetta (si supponga che la vaschetta sia sufficientemente lunga).

4. Si ricavi, dall'equazione della parabola derivata al punto 3, l'espressione dell'indice di rifrazione in funzione di z e lo si calcoli per $z = 5\,\mathrm{cm}$, $z = 10\,\mathrm{cm}$, $z = 15\,\mathrm{cm}$ e si tracci un grafico approssimativo di $n(z)$.

Negli esempi considerati finora la deviazione dalla traiettoria rettilinea è molto piccola. In altre condizioni però può diventare molto consistente, e il percorso del raggio può ricordare quello di un getto d'acqua sparato orizzontalmente.

Si supponga che il fascio entri nella vaschetta da una parete laterale, in un punto immediatamente sotto la superficie, quindi in $z = h$ e $x = 0$ (vedi figura a destra). Supponiamo che l'angolo di ingresso nel liquido sia $\beta_h = 2°$ rispetto all'asse x, verso il basso, e che il raggio arrivi sul fondo prima di colpire la parete verticale opposta.

5. Si calcoli l'angolo β_0 che il raggio forma con l'asse x sul fondo e la deviazione angolare subita all'interno del liquido.

6. Supponendo che la traiettoria del raggio si possa approssimare con una parabola anche in questo caso di grande deviazione angolare, se ne calcolino i coefficienti. Si calcoli in quale punto il raggio arriva sul fondo.

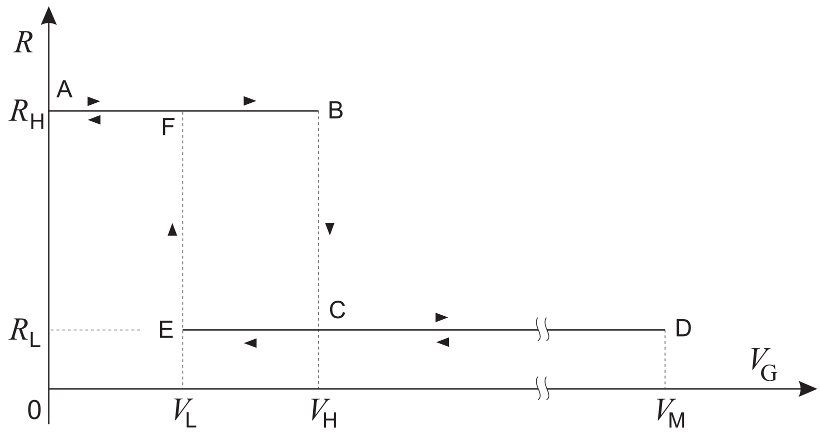
P2 Lampada a scarica

Punti 100

Una lampada a scarica è un bulbo di vetro riempito di gas, con due elettrodi a cui viene applicata la tensione elettrica. Negli ultimi anni questo tipo di lampada è diventato di uso molto comune perché ha una migliore resa luminosa: per questo motivo viene anche chiamata "lampada a basso consumo energetico". Il suo comportamento elettrico è però molto più complesso di quello di una lampada a filamento incandescente perché occorre eccitare – in modo controllato – le molecole del gas che, diseccitandosi, emettono luce; questo richiede appunto un complesso circuito elettronico di controllo.

Scopo di questo esercizio è simulare, attraverso un circuito elettrico molto semplificato, il funzionamento di una lampada a scarica per arrivare a descriverne il comportamento peculiare.

Si suppone che la lampada sia alimentata in corrente continua da un generatore di tensione V_G il cui valore passa, in un tempo molto breve, da 0 alla tensione di funzionamento V_M, cui corrisponde una potenza erogata P_M. Il comportamento elettrico della lampada si può descrivere, adottando la forte semplificazione citata sopra, in termini puramente resistivi nel modo seguente (v. figura):



- quando si aumenta la tensione V_G applicata alla lampada da 0 a V_M, la resistenza della lampada ha inizialmente un valore R_H elevato, finché la tensione applicata non supera un valore V_H (notevolmente minore di V_M). A questa tensione si innesca la scarica: la lampada si illumina di colpo e la corrente sale, il che indica che la resistenza è scesa a un valore R_L molto più basso di R_H. Una volta partita la scarica si attiva un dispositivo elettronico che mantiene invariata la resistenza per tutti i valori di tensione fino a V_M; contemporaneamente la luminosità della lampada aumenta gradualmente fino a raggiungere il valore massimo per $V_G = V_M$;
- quando, invece, si riduce la tensione applicata alla lampada a partire da V_M, la resistenza rimane R_L e la lampada resta accesa, anche se la sua luminosità diminuisce gradualmente, finché la tensione non scende sotto un valore V_L sensibilmente minore di V_H. Raggiunta questa tensione, la scarica si esaurisce, la lampada si spegne e la resistenza risale di colpo al valore R_H.

Siano:

$R_H = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_H = 10\,\mathrm{V}$, $V_L = 5\,\mathrm{V}$, $V_M = 48\,\mathrm{V}$, $P_M = 30\,\mathrm{W}$.

1. Calcolare il valore della corrente I_M alla tensione nominale V_M e il valore R_L della resistenza della lampada quando è accesa. Tracciare il grafico che rappresenta l'andamento della corrente nella lampada in funzione della tensione applicata sia sul ramo in cui la lampada è "spenta", cioè la luminosità è nulla, sia su quello in cui è "accesa" (questo grafico si chiama *caratteristica tensione-corrente* del circuito). Considerare poi, su ciascun ramo, i seguenti punti:

- il punto B, sul ramo ad alta resistenza, a cui si avvia la scarica,
- il punto C, sul ramo a bassa resistenza, a cui si arriva dopo che la scarica si è avviata,
- il punto D, sul ramo a bassa resistenza, alla massima tensione di alimentazione,
- il punto E, sul ramo a bassa resistenza, a cui la scarica si spegne,
- il punto F, sul ramo ad alta resistenza, a cui si arriva dopo che la scarica si è spenta.

Di questi calcolare (e riportare in una tabella) i relativi valori di tensione e corrente. Infine riportare gli stessi punti – **ad esclusione del punto** D – sul grafico.

Anche se queste lampade sono note per avere una vita più lunga delle lampade a incandescenza, con il tempo invecchiano e la loro potenza diminuisce gradualmente. Per descrivere in modo semplice la diminuzione della potenza la si attribuisce a una resistenza aggiuntiva R_e che agisce in serie alla resistenza della lampada ed è indipendente dal valore R_H o R_L di tale resistenza.

2. Supponendo che la potenza della lampada alla tensione nominale scenda al valore $P'_M = f\,P_M$ con $f = 2/3$, calcolare il valore della resistenza aggiuntiva equivalente R_e e il valore V_i della tensione di alimentazione a cui la scarica si innesca. Calcolare infine la ripartizione di V_i fra la caduta V_e sulla resistenza aggiuntiva R_e e la caduta V sulla lampada immediatamente dopo l'innesco della scarica che fa scendere la resistenza della lampada al valore R_L.

3. Ricavare la relazione generale, in presenza di una resistenza aggiuntiva R_e, fra la tensione di alimentazione V_G e la tensione V ai capi della lampada nelle due situazioni di lampada accesa (resistenza della lampada R_L) e lampada spenta (resistenza della lampada R_H). Rappresentare il grafico di V in funzione di V_G nei due rami e indicare sul grafico i punti significativi (sempre ad eccezione del punto D) descritti al punto 1.

4. Ripetere i calcoli fatti al punto 2 supponendo che la potenza P'_M della lampada alla tensione nominale si riduca ulteriormente fino a una frazione $f = 1/3$ di quella iniziale e costruire nuovamente il grafico di V in funzione di V_G come al punto 3.

Osservando il grafico ottenuto al punto precedente, appare evidente che in un intervallo della tensione di alimentazione V_G il circuito è instabile perché si crea una oscillazione continua fra lo stato in cui la lampada è spenta e la sua resistenza è al valore R_H e quello in cui è accesa e la sua resistenza è al valore R_L. Il valore di V_G a cui il circuito entra nella zona di instabilità è diverso a seconda che ci si arrivi partendo da $0\,\mathrm{V}$ e facendo crescere la tensione lungo il ramo di alta resistenza (lampada spenta) oppure partendo da V_M e facendola diminuire lungo il ramo di bassa resistenza (lampada accesa).

5. Indicare la zona di instabilità nel grafico costruito al punto precedente e, per ciascuno dei due rami del grafico, individuare la tensione di alimentazione alla quale si entra nella zona di instabilità e quella a cui si esce.

6. Calcolare qual è il valore minimo che deve avere la potenza ridotta P'_M se si vuole che **non** ci sia una zona di instabilità.

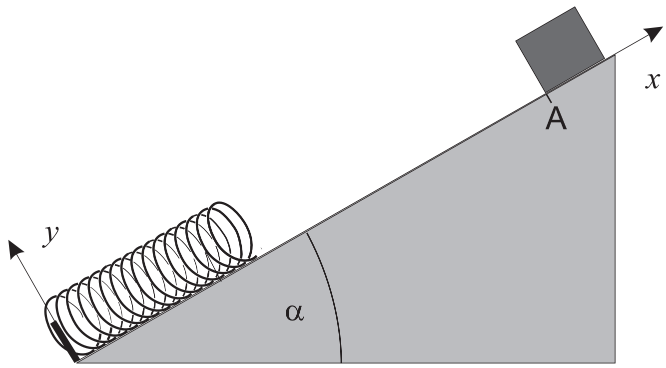
P 3 Scivolamento con rimbalzo

Punti 100

Una molla ideale di costante elastica $k = 30\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 30\,\mathrm{cm}$ è fissata ad una estremità nel punto più basso di un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale, ed è appoggiata sul piano inclinato.

Si fissi un sistema di riferimento cartesiano con l'origine alla base del piano inclinato, e l'asse x parallelo al piano e orientato verso l'alto.

Un blocco di massa $m = 200\,\mathrm{g}$ viene lasciato libero da fermo sul piano inclinato. La posizione del blocco sarà sempre data dalla coordinata x_A della sua faccia anteriore (A); inizialmente A dista 70 cm dall'origine delle coordinate. Si consideri in una prima fase una situazione in cui l'attrito è trascurabile.



1. Si esprima – scalarmente – la forza risultante agente sul blocco, F_R, in funzione di x, sia quando il blocco è staccato dalla molla sia quando è a contatto con essa. Si determini in quale posizione x_0 la forza risultante è nulla. Si tracci un grafico di $F_\mathrm{R}(x)$.

2. Si determini la posizione x_1 in cui il blocco raggiunge la sua velocità massima.

3. Si trovi l'espressione dell'energia potenziale e di quella cinetica del blocco in funzione di x.

4. Si determini la posizione x_2 in cui il blocco inverte il suo moto.

Si supponga ora che ci sia un attrito non trascurabile e che i coefficienti statico e dinamico siano rispettivamente $\mu_\mathrm{s} = 0.56$ e $\mu_\mathrm{d} = 0.52$.

5. Si verifichi che anche in questo caso il blocco, lasciato fermo nel punto A, scivola, e si trovi in quale posizione x_3 inverte ora il suo moto.

6. Si trovi l'espressione $E(x)$ dell'energia meccanica in funzione di x nel moto del blocco da x_A a x_3.

7. Si determini la posizione x_4 in cui il blocco raggiunge la massima velocità.

8. Si trovi in quale posizione x_5 il blocco si arresta definitivamente.

Materiale elaborato dal Gruppo