Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO OLIMPIADI

Olifis 2015

INTERNATIONAL YEAR OF LIGHT 2015

GARA NAZIONALE
PROVA TEORICA
VENERDÌ 10 APRILE 2015

LICEO STATALE "MEDI"
SENIGALLIA (AN)

Soluzioni

PROBLEMA n. 1 – Miraggio parabolico

Quesito n. 1.

Poiché l'indice di rifrazione dipende solo dalla quota z, si può considerare il mezzo come la sovrapposizione di tanti strati infinitesimi in ciascuno dei quali n è costante, e quindi la rifrazione avviene nel passaggio da uno strato all'altro. Tuttavia, poiché, per la legge di Snell, a ogni rifrazione il prodotto $n(z)\,\text{sen}\,\alpha(z)$ rimane costante, non è necessario conoscere il valore di n in ogni straterello, ma basta imporre la condizione di uguaglianza fra lo strato più basso di indice di rifrazione n_0 e lo strato in superficie di indice n_h

$n_h\ \text{sen}\,\alpha_h = n_0\,\text{sen}\,\alpha_0$ da cui segue $\alpha_h = 33.3°$. La variazione angolare è quindi

$\Delta\alpha = \alpha_h - \alpha_0 = 3.3°$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.1 \le \Delta\alpha \le 3.5 \quad [\,°\,]}$

Quesito n. 2.

Calcolo analogo vale per l'angolo limite

$n_0\ \text{sen}\,\alpha_{0,\text{lim}} = n_h\ \text{sen}\,\alpha_{h,\text{lim}}$

e d'altra parte $n_h\ \text{sen}\,\alpha_{h,\text{lim}} = n_\text{a}\ \text{sen}\,90° = 1$ da cui segue

$\alpha_{0,\text{lim}} = \text{arcsen}(1/n_0) = 43.23°$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{43.12 \le \alpha_{0,\text{lim}} \le 43.34 \quad [\,°\,]}$

Quesito n. 3.

Ponendo $z = x = 0$ nel punto di incidenza sul fondo della vaschetta, l'equazione della parabola è:

$z = ax^2 + bx$.

La derivata della curva, $z'(x) = 2ax + b$, fornisce il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola, al variare di x. Nel punto d'ingresso, sul fondo della vaschetta, $x = z = 0$ e il coefficiente angolare della retta tangente vale b. Chiamando $\beta = 90° - \alpha$ l'angolo con il piano orizzontale si ha

$b = \tan\beta_0 = \tan(90° - \alpha_{0,\text{lim}}) = 1.064$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.060 \le b \le 1.068 \quad [\,]}$

Il fascio arriva alla superficie superiore $(z = h)$ con un angolo di inclinazione

$\alpha_{h,\text{lim}} = \text{arcsen}(1/n_h) = 48.75°$

per cui la tangente alla traiettoria in superficie vale

$m = \tan\beta_h = \tan(90° - \alpha_{h,\text{lim}}) = 0.8769$.

Dall'equazione della parabola, $m = (dz/dx)_{x=x_h} = 2ax_h + b$ e $h = ax_h^2 + bx_h$. Ricavando x_h dalla prima e sostituendo nella seconda

$a = (m^2 - b^2)/4h = -0.0045\,\text{cm}^{-1}$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-0.0047 \le a \le -0.0043 \quad [\text{cm}^{-1}]}$

Avendo i parametri della parabola si può calcolare $x_h = 2h/(m + b)$, per cui la distanza dal punto di incidenza a cui viene riflesso il fascio è

$d = 2x_h = 4h/(m + b) = 41.2\,\text{cm}$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{41.0 \le d \le 41.5 \quad [\text{cm}]}$

Quesito n. 4.

Dalla relazione $n(z)\,\mathrm{sen}\,\alpha(z)$ = costante segue che la costante vale 1 nelle condizioni di incidenza all'angolo limite discusse al punto 3, quindi, ricordando che $\beta = 90° - \alpha$ e che

$$\frac{1}{\cos\beta} = \sqrt{1+\tan^2\beta} \quad\Rightarrow\quad n(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha(z)} = \sqrt{1+\tan^2\beta}\,.$$

Tenendo conto che $\tan\beta = 2ax + b$ e dell'equazione della parabola trovata nel punto precedente, si ha $\tan\beta(z) = \sqrt{b^2 + 4az}$. Quindi

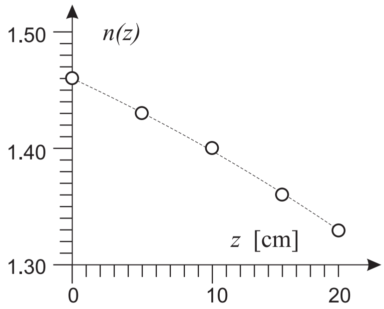
$$n(z) = \sqrt{1 + b^2 + 4az}\,.$$

I valori dell'indice di rifrazione richiesti sono quindi:

$n(5\,\mathrm{cm}) = 1.429$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.424 \le n(5\,\mathrm{cm}) \le 1.433 \quad [\,]}$

$n(10\,\mathrm{cm}) = 1.397$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.391 \le n(10\,\mathrm{cm}) \le 1.402 \quad [\,]}$

$n(15\,\mathrm{cm}) = 1.364$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.357 \le n(15\,\mathrm{cm}) \le 1.371 \quad [\,]}$



A destra il grafico corrispondente.

Questi sono i valori calcolati con il modello proposto qui. In realtà, per una deviazione così piccola, il percorso del raggio non consente di ricostruire con precisione l'andamento di $n(z)$, e i valori effettivi di n a queste quote potrebbero essere diversi da questi.

Quesito n. 5.

Dentro il liquido, vale ancora la relazione $n(z)\,\mathrm{sen}\,\alpha(z)$ = costante, dove α è il complementare dell'angolo β. Conviene quindi riscrivere la relazione come

$$n(z)\,\cos\beta(z) = \text{costante}$$

Imponendo i valori noti per $z = h$ e $z = 0$, si ha

$\beta_0 = \arccos(n_h\,\cos\beta_h/n_0) = 24.4°\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{23.9 \le \beta_0 \le 24.9 \quad [\,°\,]}$

La deviazione angolare fra ingresso e uscita in aria è quindi

$\Delta\beta = 22.4°\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{21.9 \le \beta \le 22.9 \quad [\,°\,]}$

Quesito n. 6.

Per determinare il punto in cui il raggio ritorna sul fondo della vaschetta si procede come al punto 3 precedente con l'equazione della parabola che ora è

$$z = a'x^2 + b'x + h$$

Si osserva, come fatto nel punto 3, che

$b' = -\tan(\beta_h) = -0.03492$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-0.03499 \le b' \le -0.03485 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Sul fondo si ha $\tan(-\beta_0) = (dz/dx)_{z=0} = 2a'x + b'$ e $0 = a'x^2 + b'x + h$. Ricavando a' dalla prima e sostituendo nella seconda si ottiene

$a' = \dfrac{b'^2 - \tan^2\beta_0}{4h} = -0.00257\,\mathrm{cm}^{-1}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-0.00268 \le a' \le -0.00245 \quad [\,\mathrm{cm}^{-1}\,]}$

$x = \dfrac{2h}{\tan(\beta_0) - b'} = 81.7\,\mathrm{cm}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{79.8 \le x \le 83.7 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

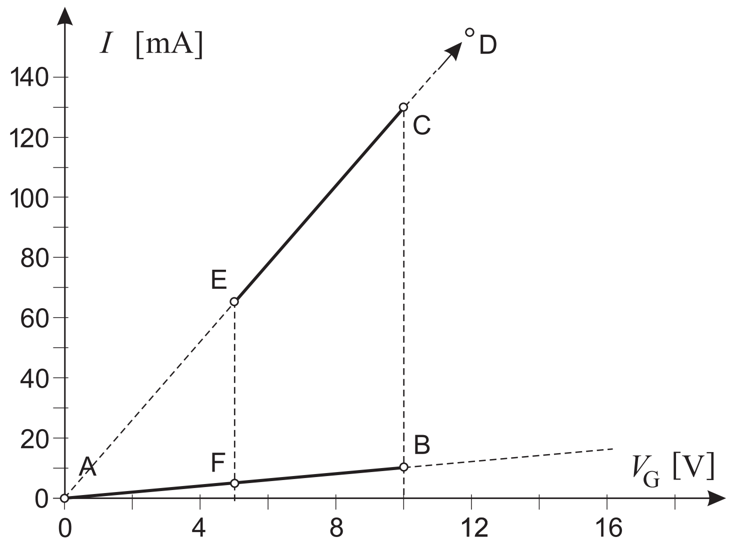
PROBLEMA n. 2 – Lampada a scarica

Quesito n. 1.

$I_\mathrm{M} = P_\mathrm{M}/V_\mathrm{M} = 625\,\mathrm{mA}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{623 \le I_\mathrm{M} \le 628 \quad [\,\mathrm{mA}\,]}$

$R_\mathrm{L} = V_\mathrm{M}/I_\mathrm{M} = 76.8\,\Omega$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{76.3 \le R_\mathrm{L} \le 77.3 \quad [\,\Omega\,]}$

Punto	V_G [V]	I [mA]
B:	10	10
C:	10	130
D:	48	625
E:	5	65
F:	5	5



Quesito n. 2.

Con una potenza a regime ridotta, P'_M, la resistenza equivalente del circuito $R^\star_\mathrm{L}$ è tale che

$$\frac{V_\mathrm{M}^2}{R^\star_\mathrm{L}} = P'_\mathrm{M} = f\,P_\mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad R^\star_\mathrm{L} = \frac{V_\mathrm{M}^2}{f\,P_\mathrm{M}} = \frac{1}{f}R_\mathrm{L}\,.$$

Poiché $R^\star_\mathrm{L} = R_\mathrm{L} + R_\mathrm{e}$ si ha $R_\mathrm{e} = R^\star_\mathrm{L} - R_\mathrm{L} = R_\mathrm{L}\left(\frac{1}{f} - 1\right) = R_\mathrm{L}\frac{1-f}{f}\,.$

Per $f = 2/3$ si ha

$R_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\,R_\mathrm{L} = 38.4\,\Omega$ e RIS $\Rightarrow$ $\boxed{37.9 \le R_\mathrm{e} \le 38.9 \quad [\,\Omega\,]}$

$R^\star_\mathrm{L} = \frac{3}{2}\,R_\mathrm{L} = 115.2\,\Omega\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{114.3 \le R^\star_\mathrm{L} \le 116.1 \quad [\,\Omega\,]}$

Con la lampada spenta la resistenza equivalente del circuito è quindi

$R^\star_\mathrm{H} = R_\mathrm{H} + R_\mathrm{e} = 1038\,\Omega\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1036 \le R^\star_\mathrm{H} \le 1041 \quad [\,\Omega\,]}$

Al momento dell'innesco, poiché la d.d.p. ai capi della lampada deve essere V_H, e dunque la corrente è ancora $V_\mathrm{H}/R_\mathrm{H}$, la tensione di alimentazione dovrà essere

$V_\mathrm{i} = V_\mathrm{H}\frac{R^\star_\mathrm{H}}{R_\mathrm{H}} = 10.38\,\mathrm{V}\,.$ Punto B RIS $\Rightarrow$ $\boxed{10.32 \le V_\mathrm{i} \le 10.45 \quad [\,\mathrm{V}\,]}$

Immediatamente dopo l'innesco della scarica, la tensione di alimentazione rimane la stessa ma si ripartisce in proporzioni diverse fra la resistenza aggiuntiva e a lampada. Chiamando V_e e V le due tensioni, si ha, per la relazione del partitore di tensione:

$V_\mathrm{e} = V_\mathrm{i}\frac{R_\mathrm{e}}{R^\star_\mathrm{L}} = 3.46\,\mathrm{V}$ e RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.37 \le V_\mathrm{e} \le 3.55 \quad [\,\mathrm{V}\,]}$

$V = V_\mathrm{i}\frac{R_\mathrm{L}}{R^\star_\mathrm{L}} = f\,V_\mathrm{i} = 6.92\,\mathrm{V}\,.$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{6.86 \le V \le 6.98 \quad [\,\mathrm{V}\,]}$

Quesito n. 3.

Più in generale, al variare della tensione di alimentazione V_G, sul ramo "lampada accesa" la relazione è la stessa derivata al punto precedente; sul ramo lampada spenta vale la relazione analoga con le corrispondenti resistenze:

$$V = V_G \frac{R_L}{R_L^\star} \quad \text{e} \quad V = V_G \frac{R_H}{R_H^\star}\,.$$

Il punto C è quello determinato in precedenza con

$$V_i = 10.4\,\mathrm{V} \quad \text{e} \quad V = V_i \frac{R_L}{R_L^\star} = f\,V_i = 6.9\,\mathrm{V}\,.$$

Quando la tensione di alimentazione si stabilizza al valore di lavoro V_M, la tensione applicata alla lampada si calcola ancora come

$$V = V_M \frac{R_L}{R_L^\star} = f\,V_M = 32.00\,\mathrm{V}\,. \quad \text{Punto D}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{31.87 \le V(\mathrm{D}) \le 32.13 \quad [\mathrm{V}]}$

Nella fase di spegnimento, la lampada resta accesa fin quando la tensione V scende a V_L, corrispondente ad una tensione di alimentazione

$$V_s = V_L \frac{R_L^\star}{R_L} = \frac{V_L}{f} = 7.50\,\mathrm{V} \quad \text{Punto E}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{7.47 \le V_s \le 7.53 \quad [\mathrm{V}]}$

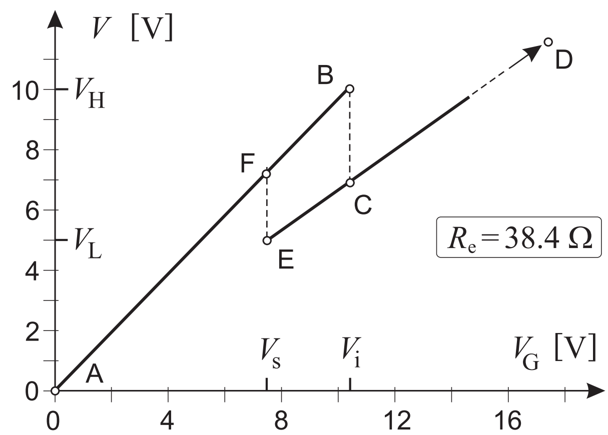
al di sotto di questo valore la lampada si spegne mentre la resistenza sale ad R_H; la tensione corrispondente sulla lampada sale ora a

$$V = V_s \frac{R_H}{R_H^\star} = 7.22\,\mathrm{V} \quad \text{Punto F}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{7.16 \le V(\mathrm{F}) \le 7.28 \quad [\mathrm{V}]}$

inferiore alla soglia di innesco: e la lampada resta spenta.

Punto	V_G [V]	V [V]
B:	10.4	10
C:	10.4	6.9
D:	48	32
E:	7.5	5
F:	7.5	7.2



Quesito n. 4.

Con $f = 1/3$ si ha che

$$R_L^\star = 3R_L = 230.4\,\Omega \quad \text{e}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{228.6 \le R_L^\star \le 232.2 \quad [\Omega]}$

$$R_e = 2R_L = 153.6\,\Omega \quad \text{per cui}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{152.2 \le R_e \le 155.0 \quad [\Omega]}$

$$R_H^\star = R_H + R_e = 1154\,\Omega\,;$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1150 \le R_H^\star \le 1157 \quad [\Omega]}$

di conseguenza la tensione di alimentazione all'innesco della scarica è adesso

$$V_i = V_H \frac{R_H^\star}{R_H} = 11.54\,\mathrm{V}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{11.46 \le V_i \le 11.62 \quad [\mathrm{V}]}$

che, immediatamente dopo, si ripartisce analogamente a prima

$$V = V_i \frac{R_L}{R_L^\star} = f\,V_i = 3.85\,\mathrm{V} \quad \text{e}$$

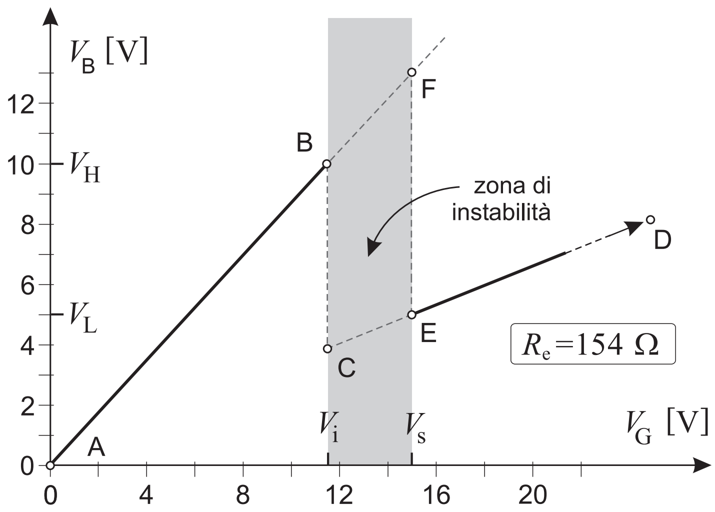
RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.77 \le V \le 3.93 \quad [\mathrm{V}]}$

$$V_e = V_i \frac{R_e}{R_L^\star} = 7.69\,\text{V}\,. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{7.53 \le V_e \le 7.85 \quad [\text{V}]}$$

Ma adesso il valore di V è minore della soglia di 5 V a cui la lampada può rimanere accesa; di conseguenza la lampada si spegne, la resistenza risale e il ciclo si ripete: si genera quindi un'instabilità che verrà poi discussa al punto 5.

Gli altri valori in tabella sono determinati come al punto precedente.

Punto	V_G [V]	V [V]
B:	11.5	10
C:	11.5	3.8
D:	48	16
E:	15	5
F:	15	13



Quesito n. 5.

Sul ramo di alta resistenza (lampada spenta), con tensione di alimentazione crescente a partire da 0 V, si entra nella zona di instabilità a $V_G = 11.5\,\text{V}$, come visto al punto precedente.

Sul ramo di bassa resistenza (lampada accesa), con tensione di alimentazione decrescente a partire da V_M, la lampada si spegne quando $V = V_L$, cioè per una tensione di alimentazione

$$V_s = V_L \frac{R_L^\star}{R_L} = \frac{V_L}{f} = 3V_L = 15.00\,\text{V}\,. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{14.94 \le V_s \le 15.06 \quad [\text{V}]}$$

La resistenza della lampada sale immediatamente al valore R_H e la tensione applicata alla lampada raggiunge

$$V = V_s \frac{R_H}{R_H^\star} = 13.00\,\text{V}\,. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{12.89 \le V \le 13.12 \quad [\text{V}]}$$

Questo valore è però superiore a quello di innesco e il circuito torna ad avere un comportamento instabile.

L'intervallo d'instabilità si ha quindi per valori della tensione di alimentazione compresi tra 11.5 V e 15 V.

Quesito n. 6.

Come si deduce dall'osservazione dei due grafici precedenti, la zona di instabilità scompare quando la tensione di alimentazione V_G(B)= V_G(C) è maggiore di V_G(E)= V_G(F). Considerando le espressioni già trovate per i punti B ed E si ha

$$V_H \frac{R_H^\star}{R_H} > V_L \frac{R_L^\star}{R_L} \quad \Rightarrow \quad V_H \frac{R_H + R_e}{R_H} > V_L \frac{R_L + R_e}{R_L}\,.$$

Ricordando che $R_e = R_L\,(1-f)/f$ si sostituisce ricavando poi

$$f > \frac{(V_L/V_H)\,R_H - R_L}{R_H - R_L} = 0.458 \quad \Rightarrow \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{0.453 \le f \le 0.463 \quad [\,]}$$

$$\Rightarrow \quad P'_M = 13.75\,\text{W}\,. \qquad \text{RIS} \Rightarrow \boxed{13.58 \le P'_M \le 13.93 \quad [\text{W}]}$$

PROBLEMA n. 3 – Scivolamento con rimbalzo

Quesito n. 1.

Le forze che agiscono sul blocco sono il peso, $\vec{P}$, la forza normale, $\vec{N}$, e – quando il blocco è a contatto con la molla – la forza elastica, $\vec{F}_e$. Il moto del blocco è lungo l'asse x, e questo implica che lungo l'asse y le forze si equilibrano. Per $x < \ell_0$ il blocco è a contatto con la molla, dunque la forza risultante è la somma della forza elastica e della componente x del peso ($P_x = -mg \operatorname{sen} \alpha$), mentre per $x > \ell_0$ c'è solo P_x; pertanto, indicando con F_R la componente x (l'unica non nulla) di $\vec{F}_R$, si ha

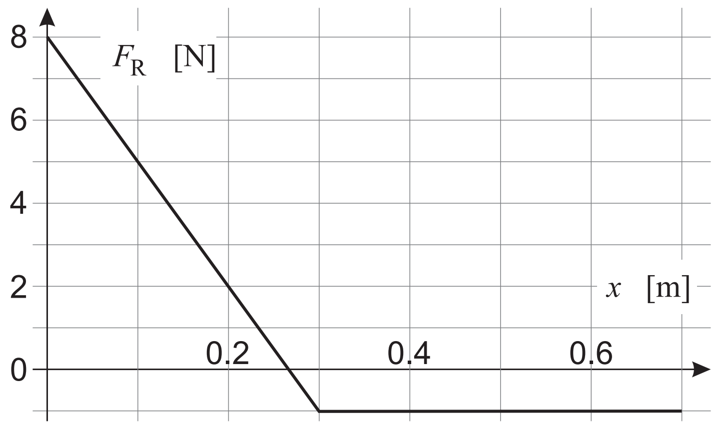
$$(1) \quad F_R = \begin{cases} k(\ell_0 - x) - mg \operatorname{sen} \alpha & \text{per} \quad x < \ell_0 \\ - mg \operatorname{sen} \alpha & \text{per} \quad x \geq \ell_0 \,. \end{cases}$$

Tale forza si annulla quando la forza elastica equilibra la componente del peso parallela al piano inclinato

$$(2) \quad x_0 = \ell_0 - \frac{mg}{k} \operatorname{sen} \alpha = 26.73\,\text{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{26.65 \leq x_0 \leq 26.81 \quad [\,\text{cm}\,]}$

Il grafico di $F_R(x)$ è il seguente



Chiaramente, questo grafico si riferisce ad una molla ideale come quella considerata nel testo. Una molla reale non può essere compressa al di sotto di una certa lunghezza minima.

Quesito n. 2.

La forza elastica ha verso concorde all'asse x, mentre $\vec{P}_x$ ha verso opposto. Fino a quando $\vec{P}_x$ ha intensità maggiore di $\vec{F}_e$, il blocco aumenta – in modulo – la sua velocità; quando la forza più intensa diventa $\vec{F}_e$ il blocco rallenta.

La velocità massima viene raggiunta quando le due forze si equilibrano, dunque

$$x_1 = x_0\,.$$

È interessante osservare che la posizione in cui il blocco raggiunge la sua velocità massima è indipendente dalla posizione di partenza.

Quesito n. 3.

Sul blocco agiscono due forze conservative: il peso e la forza elastica (quest'ultima, ovviamente, presente solo quando il blocco è a contatto con la molla). L'energia potenziale sarà quindi la somma dei contributi dovuti a queste due forze. Fissato per comodità il livello zero dell'energia potenziale alla base del piano inclinato,

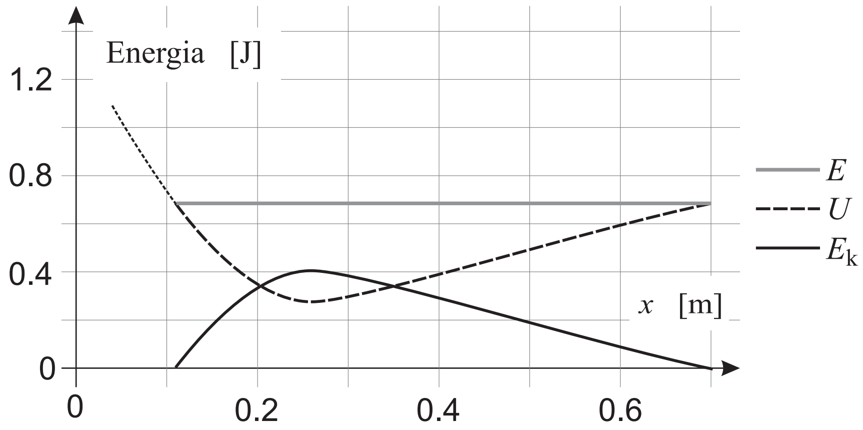
$$(3) \quad U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2 + mg\,x \operatorname{sen} \alpha & \text{per} \quad x < \ell_0 \\ + mg\,x \operatorname{sen} \alpha & \text{per} \quad x > \ell_0 \,. \end{cases}$$

Per trovare l'espressione dell'energia cinetica, E_k, si osserva che sul blocco non agiscono forze dissipative (l'attrito è trascurabile) e quindi l'energia meccanica, E, si conserva. Poiché nella posizione di partenza il blocco è fermo, $E = U(x_A) = mg\,x_A \operatorname{sen} \alpha\,.$

L'energia cinetica sarà allora:

$$(4) \quad E_\mathrm{k}(x) = E - U(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2 + mg\,(x_\mathrm{A} - x)\ \mathrm{sen}\,\alpha & \text{per} \quad x < \ell_0 \\ \phantom{-\dfrac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2} + mg\,(x_\mathrm{A} - x)\ \mathrm{sen}\,\alpha & \text{per} \quad x \geq \ell_0\,. \end{cases}$$

Un grafico può essere utile per comprendere meglio la situazione.



Quesito n. 4.

Nel punto di inversione del moto la velocità è nulla e di conseguenza è nulla l'energia cinetica. Uno di tali punti si ha per $x > \ell_0$ ed è ovviamente x_A. L'altro punto si avrà per $x < \ell_0$ e lo si può trovare imponendo che sia nulla l'espressione dell'energia cinetica valida in questa regione

$$2mg(x_\mathrm{A} - x)\ \mathrm{sen}\,\alpha - k(\ell_0 - x)^2 = 0$$

$$kx^2 + 2(mg\ \mathrm{sen}\,\alpha - k\ell_0)x + k\ell_0^2 - 2mg\ x_\mathrm{A}\ \mathrm{sen}\,\alpha = 0\,.$$

Si può semplificare questa espressione ricordando che $mg\ \mathrm{sen}\,\alpha = -P_x$.

$$(5) \quad kx^2 - 2(P_x + k\ell_0)x + k\ell_0^2 + 2P_x\ x_\mathrm{A} = 0$$

$$x = \frac{P_x + k\ell_0 \pm \sqrt{(P_x + k\ell_0)^2 - k(k\ell_0^2 + 2P_x\,x_\mathrm{A})}}{k} = \frac{P_x + k\ell_0 \pm \sqrt{P_x^2 - 2kP_x(x_\mathrm{A} - \ell_0)}}{k}\,.$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene la soluzione

$x_2 = 10.2\,\mathrm{cm}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{10.0 \leq x_2 \leq 10.5 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

mentre l'altra soluzione, 43.2 cm, non è accettabile in quanto maggiore di ℓ_0.

Quesito n. 5.

Quando il blocco è appoggiato fermo sul piano inclinato, per avere equilibrio deve essere

$$(6) \quad \vec{N} + \vec{A}_\mathrm{s} + \vec{P} = 0$$

dove $\vec{A}_\mathrm{s}$ è l'attrito statico. Scomponendo questa equazione lungo le direzioni degli assi cartesiani si ha

$$\begin{cases} A_\mathrm{s} + P_x = 0 \\ N + P_y = 0\,. \end{cases}$$

Dalla condizione di equilibrio lungo l'asse y si ricava

$$N = -P_y = mg\ \cos\alpha\,.$$

Questa relazione vale sia quando il corpo è fermo sia quando scivola. Dalla condizione di equilibrio lungo l'asse x si ha

$$A_\mathrm{s} = -P_x = mg\ \mathrm{sen}\,\alpha\,.$$

Affinché sia possibile soddisfare questa condizione, questo valore dev'essere minore dell'attrito statico massimo, $A_{\mathrm{s,max}} = \mu_{\mathrm{s}} N$:

$$mg \operatorname{sen}\alpha < \mu_{\mathrm{s}}\, mg \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha < \mu_{\mathrm{s}}\,.$$

Poiché $\tan 30° = 0.58$ mentre $\mu_{\mathrm{s}} = 0.56$ si vede che l'attrito statico da solo non è sufficiente a garantire l'equilibrio lungo l'asse x. Pertanto il blocco, quando viene lasciato nel punto A, effettivamente scivola. Poiché stavolta l'attrito non è trascurabile, deve essere

$$(7) \quad L_{\mathrm{nc}} = \Delta E$$

dove L_{nc} è il lavoro fatto dalle forze non conservative (in questo caso l'attrito radente), e ΔE è la variazione di energia meccanica. Applicando questa legge all'intervallo tra la partenza e il punto di inversione del moto, risulta $\Delta E = \Delta U$, perché l'energia cinetica è nulla all'inizio e alla fine.

Il lavoro fatto dall'attrito dinamico può essere calcolato facilmente, perché il moto è rettilineo e la forza è costante. Tenendo presente che l'angolo tra forza e spostamento è 180° si ha

$$L_{\mathrm{nc}} = -A_{\mathrm{d}}\,|x - x_{\mathrm{A}}| = \mu_{\mathrm{d}} N (x - x_{\mathrm{A}}) = \mu_{\mathrm{d}} mg \cos\alpha\,(x - x_{\mathrm{A}})\,.$$

La (7) si scrive allora

$$\mu_{\mathrm{d}}\, mg \cos\alpha\,(x - x_{\mathrm{A}}) = mg\, x \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} k(\ell_0 - x)^2 - mg\, x_{\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha$$

$$kx^2 + 2\left[(\operatorname{sen}\alpha - \mu_{\mathrm{d}} \cos\alpha) mg - k\ell_0\right] x + k\ell_0^2 - 2(\operatorname{sen}\alpha - \mu_{\mathrm{d}} \cos\alpha) mg\, x_{\mathrm{A}} = 0\,. \text{ [1]}$$

Questa espressione si semplifica sensibilmente se si pone

$$f = (\operatorname{sen}\alpha - \mu_{\mathrm{d}} \cos\alpha) mg\,.$$

Si ha infatti:

$$(8) \quad kx^2 + 2\,(f - k\ell_0)\, x + k\ell_0^2 - 2f\, x_{\mathrm{A}} = 0\,.$$

Si può notare che f ha un significato fisico: è la somma – cambiata di segno – di P_x e dell'attrito. In sostanza, la risposta a questa domanda si riconduce alla analoga relativa al caso senza attrito, se in quest'ultimo si sostituisce P_x con $P_x + A_{\mathrm{d}} = -f$. Con questa sostituzione, la (5) diventa identica alla (8). Risolvendo si ottiene

$$x = \frac{k\ell_0 - f \pm \sqrt{f^2 + 2kf(x_{\mathrm{A}} - \ell_0)}}{k}\,.$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene la soluzione

$$x_3 = 24.6\,\mathrm{cm} \qquad \textsf{RIS} \;\Rightarrow\; \boxed{24.2 \le x_3 \le 25.0 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$$

mentre l'altra soluzione, $34.8\,\mathrm{cm}$, non è accettabile perché è maggiore di ℓ_0.

Si osserva che $x_3 > x_2$, e questo significa che, in presenza d'attrito, la velocità del corpo si annulla prima, come dev'essere.

Quesito n. 6.

L'espressione $E(x)$ può essere trovata esplicitando la (7)

$$\mu_{\mathrm{d}}\, mg \cos\alpha(x - x_{\mathrm{A}}) = E(x) - E_{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad E(x) = mg\left[\mu_{\mathrm{d}} \cos\alpha(x - x_{\mathrm{A}}) + x_{\mathrm{A}} \operatorname{sen}\alpha\right]\,.$$

Si vede che E dipende linearmente da x.

---

[1] In alternativa, al posto della (7), è possibile usare il teorema dell'energia cinetica (talvolta indicato anche come *teorema delle forze vive*, perché anticamente l'energia cinetica veniva chiamata *vis viva*, cioè forza viva). Con pochissime differenze nei passaggi, si arriva alla (8).

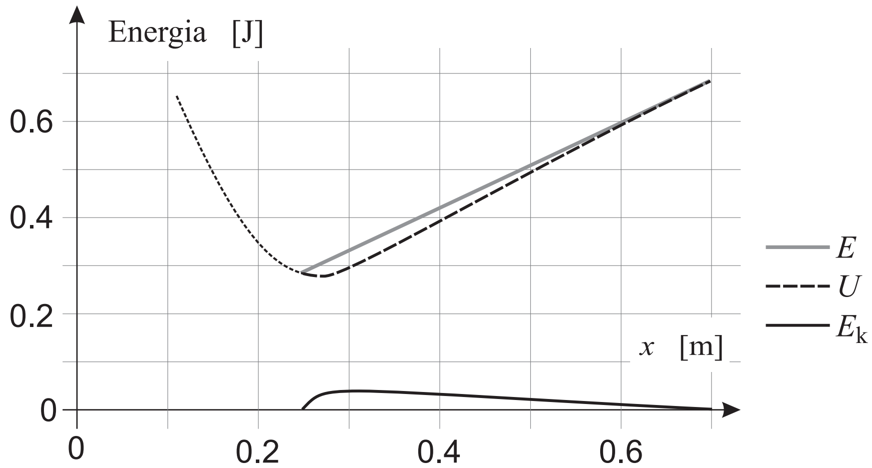
Quesito n. 7.

Si cerca ora la posizione in cui il blocco raggiunge la massima velocità. Stavolta le forze che agiscono lungo l'asse x sono tre: $\vec{P}_x$, l'attrito dinamico $\vec{A}_\mathrm{d}$ e, quando il blocco è a contatto con la molla, la forza elastica $\vec{F}_\mathrm{e}$. Quando il corpo scende, l'attrito è rivolto verso l'alto, come la forza elastica, mentre $\vec{P}_x$ è rivolta verso il basso. La velocità massima si avrà quando la forza elastica e l'attrito equilibrano $\vec{P}_x$:

$$k(\ell_0 - x) + \mu_\mathrm{d}\, mg\, \cos\alpha = mg\, \mathrm{sen}\,\alpha$$

(9) $x = \ell_0 - \dfrac{mg}{k}\,(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_\mathrm{d}\, \cos\alpha) = x_4 = 29.7\,\mathrm{cm}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{29.6 \le x_4 \le 29.8 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

cioè subito dopo essere entrato in contatto con la molla. Questa equazione generalizza la (2), e anche in questo caso si può ottenere direttamente sostituendo P_x con $P_x + A_\mathrm{d}$. Può essere utile visualizzare su un grafico la situazione.



Quesito n. 8.

Si deve ora cercare la posizione in cui il blocco si arresta definitivamente. Cominciamo ad osservare che in x_3 la sua velocità è nulla, quindi la prima cosa che dobbiamo verificare è se da questa posizione riparte oppure no. La condizione di equilibrio è ora

(10) $\vec{N} + \vec{A}_\mathrm{s} + \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{e} = 0\,.$

Considerando le componenti cartesiane, si ha

$$\begin{cases} A_\mathrm{s} + P_x + F_\mathrm{e} = 0 \\ N + P_y = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava ancora

$N = mg\, \cos\alpha$ e dalla prima

$A_\mathrm{s} = mg\, \mathrm{sen}\,\alpha - k(\ell_0 - x_3) = -0.65\,\mathrm{N}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{-0.72 \le A_\mathrm{s} \le -0.58 \quad [\,\mathrm{N}\,]}$

Il segno dice che l'attrito statico necessario per garantire l'equilibrio è rivolto verso il basso. Questo è logico, perché $x_3 < x_0$, quindi in questa posizione la forza elastica prevale su P_x. Per sapere se l'equilibrio è possibile, si deve confrontare il valore assoluto del risultato trovato con l'attrito statico massimo:

$A_\mathrm{s,max} = \mu_\mathrm{s} N = \mu_\mathrm{s}\, mg\, \cos\alpha = 0.951\,\mathrm{N}$ RIS $\Rightarrow$ $\boxed{0.947 \le A_\mathrm{s,max} \le 0.956 \quad [\,\mathrm{N}\,]}$

Poiché $|A_\mathrm{s}| < A_\mathrm{s,max}$, stavolta l'attrito statico riesce a mantenere l'equilibrio e quindi il blocco, una volta arrivato in x_3, non riparte. In definitiva

$x_5 = x_3\,.$

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
e-mail: segreteria@olifis.it - Tel. 0732 1966045
WEB: www.olifis.it