Associazione per l'Insegnamento della Fisica

PROGETTO OLIMPIADI

Olifis 2015

INTERNATIONAL YEAR OF LIGHT 2015

GARA DI 2° LIVELLO
VENERDÌ 13
FEBBRAIO 2015

Soluzioni

Quesiti

NOTA importante sui RISULTATI NUMERICI:

Nella soluzione dei quesiti e dei problemi per i quali è richiesto un risultato numerico, tale risultato – esclusi i casi banali – è accompagnato dall'indicazione dell'intervallo dei valori da ritenersi accettabili, sulla base dell'incertezza con cui sono stati forniti i dati del problema. Il risultato è dunque considerato corretto se:

1. il valore numerico rientra nell'intervallo indicato o coincide con quello della soluzione ufficiale quando non è indicato alcun intervallo;
2. il numero di cifre significative con cui è scritto non differisce per più di una dal numero di cifre riportato nella soluzione ufficiale;
3. viene indicata la corretta unità di misura.

Qualora anche una sola di queste condizioni non sia rispettata, il risultato numerico deve essere considerato errato (perdita di 1 punto).

QUESITO n. 1

Il raggio subisce una prima rifrazione passando dall'acqua all'olio e una seconda passando dall'olio all'aria. Indicando con n_1 l'indice di rifrazione dell'acqua, con n_2 quello dell'olio, e con α_1 e α_2 rispettivamente gli angoli che il raggio forma, nei due mezzi, con la direzione verticale, abbiamo, per la legge di Snell

$$n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \,.$$

Poiché le superfici acqua-olio e olio-aria sono entrambe orizzontali, e quindi parallele, l'angolo con cui il raggio incide sulla seconda superficie è ancora α_2 e quindi, in questa seconda rifrazione, avremo

$$n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_3$$

dove α_3 è l'angolo con cui il raggio emerge nell'aria e abbiamo tenuto conto del fatto che, per l'aria, $n = 1$.

Dalle due relazioni precedenti, per la proprietà transitiva, abbiamo che $\operatorname{sen} \alpha_3 = n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = 0.855$, da cui

$$\alpha_3 = 1.025\,\mathrm{rad} = 58.7^\circ \,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{58.4 \le \alpha_3 \le 59.1 \quad [\,^\circ\,]}$

Da quanto detto sopra si capisce che la legge di Snell implica che il prodotto $n \operatorname{sen} \alpha$ è costante passando da uno strato all'altro. Anche se interponessimo altri strati tra acqua e aria, l'angolo finale sarebbe lo stesso.

QUESITO n. 2

Il moto è orizzontale poiché le forze verticali che agiscono sui blocchi si equilibrano. Applicando la seconda legge della dinamica al sistema formato dalle tre scatole si ricava l'accelerazione a del sistema

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \,.$$

Indichiamo con $F_{2,1}$ la forza che la scatola centrale esercita su quella di sinistra. Applicando la seconda legge della dinamica alla sola scatola di sinistra abbiamo

$$F - F_{2,1} = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F_{2,1} = F - m_1 a = (m_2 + m_3)\, a\,.$$

Allo stesso risultato si perviene considerando che la prima scatola spinge le altre due con una forza di intensità $(m_2 + m_3)a$ e, per il terzo principio, questa è anche l'intensità della forza che riceve dalle altre due.

In definitiva, l'intensità della forza richiesta è

$$F_{2,1} = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\, F = \frac{5}{6}\, F\,.$$

QUESITO n. 3

Fissiamo un sistema di riferimento orientato verso il basso. Poiché entrambi gli intervalli di tempo considerati iniziano al momento del lancio, lo spazio Δy_1 percorso dalla pallina nell'intervallo di tempo $\Delta t_1 = 1\,\mathrm{s}$ è dato da

$\Delta y_1 = v_0\, \Delta t_1 + {}^1\!/_2\, g(\Delta t_1)^2$ e analogamente per lo spazio Δy_2 percorso nell'intervallo $\Delta t_2 = 3\,\mathrm{s}$.

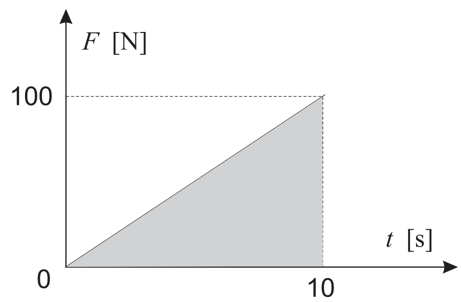
Essendo $\Delta y_2 = 5\Delta y_1$ e $\Delta t_2 = 3\Delta t_1$, abbiamo $5\left[v_0\, \Delta t_1 + {}^1\!/_2\, g(\Delta t_1)^2\right] = v_0\,(3\Delta t_1) + {}^1\!/_2\, g(3\Delta t_1)^2$ da cui

$$v_0 = g\Delta t_1 = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

QUESITO n. 4

La forza dipende dal tempo secondo la relazione $F(t) = kt$, con $k = 10\,\mathrm{N\,s^{-1}}$, rappresentata in figura. La variazione da 0 a $F_1 = 100\,\mathrm{N}$ avviene in $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ e l'impulso I applicato dalla forza alla massa è misurato dall'area sotto al grafico rappresentato, nell'intervallo considerato. Quindi

$$I = \frac{1}{2}\, F_1\, \Delta t = \frac{1}{2} k\, \Delta t^2 = 500\,\mathrm{N\,s}.$$



Alternativamente, si può osservare che, poiché l'intensità della forza cresce linearmente nel tempo, il suo valore medio è dato dalla media aritmetica tra i valori iniziale e finale: $F_\mathrm{m} = 50\,\mathrm{N}$. Di conseguenza $I = F_\mathrm{m}\Delta t = 500\,\mathrm{N\,s}$.

Indicando con p la quantità di moto, per il teorema dell'impulso possiamo scrivere

$I = \Delta p = mv\,.$ Otteniamo allora $m = 10\,\mathrm{kg}\,.$

QUESITO n. 5

La pressione massima che il gas può raggiungere all'interno della bombola è pari alla pressione di attivazione della valvola di sicurezza. La bombola è rigida e il suo volume non cambia apprezzabilmente per una variazione di temperatura così piccola.

Di conseguenza il prodotto pV non cambia e dall'equazione di stato dei gas perfetti abbiamo

$$n_1 R T_1 = n_2 R T_2$$

dove T è la temperatura assoluta del gas, R la costante dei gas e n la quantità di sostanza espressa in moli. Poiché quest'ultima è direttamente proporzionale alla massa m, avremo

$$m_1 T_1 = m_2 T_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1 \frac{T_1}{T_2} = 14.0\,\mathrm{kg}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{13.9 \leq m_2 \leq 14.1 \quad [\mathrm{kg}]}$

QUESITO n. 6

Detta m_0 la massa d'acqua contenuta inizialmente nel recipiente, la potenza P che la piastra riscaldante fornisce all'acqua è

$$P = \frac{c m_0 \Delta T}{\Delta t_1}$$

dove Δt_1 è il tempo che l'acqua impiega a raggiungere la temperatura di 40°C, ΔT la corrispondente variazione di temperatura e c il calore specifico dell'acqua.

La quantità di calore Q che la piastra trasferisce all'acqua, durante l'ebollizione, nell'intervallo $\Delta t_2 = 10\,\mathrm{min}$ è allora

$$Q = P\,\Delta t_2 = \frac{c m_0 \Delta T}{\Delta t_1} \Delta t_2$$

e di conseguenza la massa d'acqua che vaporizza, m_v risulta

$$m_\mathrm{v} = \frac{Q}{\lambda_\mathrm{v}} = \frac{c m_0 \Delta T\,\Delta t_2}{\lambda_\mathrm{v}\,\Delta t_1}$$

dove λ_v è il calore latente di vaporizzazione dell'acqua.

Rispetto alla massa iniziale, la percentuale di acqua che vaporizza è allora

$$\eta = \frac{m_\mathrm{v}}{m_0} = \frac{c \Delta T \Delta t_2}{\lambda_\mathrm{v}\,\Delta t_1} = 0.368 = 36.8\,\%\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{34.4 \le \eta \le 39.2 \quad [\,\%\,]}$

NOTA per i correttori ⇒ *Attribuire 1 punto a chi trova solo la potenza della piastra; 2 punti a chi determina anche la massa d'acqua che vaporizza.*

QUESITO n. 7

In un tubo con un'estremità aperta e l'altra chiusa si può avere un'onda stazionaria quando si ha un minimo dell'ampiezza della vibrazione (nodo) in corrispondenza dell'estremità chiusa (in questo caso, la superficie dell'acqua) e un massimo (ventre) in corrispondenza di quella aperta$^{(\star)}$.

Se si considerano le variazioni della pressione, si ha invece un massimo in corrispondenza dell'estremità chiusa e un nodo in corrispondenza di quella aperta. In entrambi i casi si arriva alla conclusione che la prima risonanza si ha per un'altezza h della colonna d'aria pari a $\lambda/4$, la seconda a $3\lambda/4$ e così via.

Indicando con n l'ordine della risonanza nella situazione iniziale, in corrispondenza dell'altezza h_1 abbiamo

$$h_1 = (2n-1)\,\frac{\lambda}{4}\,.$$

In corrispondenza dell'altezza h_2, l'ordine della risonanza che si osserva sarà $n-1$, visto che, aggiungendo acqua l'altezza della colonna d'aria diminuisce; quindi

$$h_2 = [2(n-1)-1]\,\frac{\lambda}{4} = (2n-3)\,\frac{\lambda}{4}\,.$$

Sottraendo membro a membro abbiamo $\Delta h = \lambda/2$ e quindi la velocità del suono v sarà

$$v = \lambda\nu = 2\Delta h\,\nu = 338\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,.$$

RIS ⇒ $\boxed{334 \le v \le 341 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

NOTA per i correttori ⇒ *È accettabile anche la risposta di chi arriva a capire che $h_1 - h_2 = \lambda/2$ senza aver derivato l'intera condizione di risonanza.*

$(\star)$ In realtà, un po' oltre l'estremità, con una piccola correzione proporzionale al diametro del tubo; qui però, come detto nel testo, trascuriamo questo aspetto.

QUESITO n. 8

I positroni sono soggetti alla forza di Lorentz, che è sempre perpendicolare alla velocità. Quando si muovono in un campo magnetico uniforme, e la loro velocità è perpendicolare al campo stesso, la traiettoria che ne risulta è circolare, e il suo raggio è

$$r = \frac{mv}{qB}$$ ed è quindi direttamente proporzionale alla velocità della particella.

Dalla figura si vede chiaramente che il raggio della traiettoria nella parte superiore è maggiore che nella parte inferiore, e dunque il positrone ha una velocità minore nella parte inferiore. Ovviamente, questo è dovuto al fatto che esso perde energia nell'attraversare la lastra di piombo. Il positrone dunque proviene dall'alto.

Dalla regola della mano destra, e dal fatto che il positrone ha una carica positiva, si deduce che il campo magnetico ha verso entrante.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Attribuire 1 punto a chi determina correttamente solo il verso di attraversamento; 1 punto a chi sbaglia il verso di attraversamento ma, coerentemente con questo, dice che il campo è uscente.*

QUESITO n. 9

Sia C_0 la capacità iniziale di ognuno dei due condensatori. Dopo che la distanza tra le armature del primo condensatore è raddoppiata avremo che le capacità sono rispettivamente $C_\mathrm{A} = C_0/2$ e $C_\mathrm{B} = C_0$, perché in un condensatore piano la capacità è inversamente proporzionale alla distanza tra le armature.

Indichiamo con q_A e q_B le cariche sui due condensatori al termine del processo. Per la conservazione della carica, sarà: $q_A + q_B = 2q_0$.

Alla fine del processo, la differenza di potenziale sarà diversa da quella iniziale ma sarà ancora la stessa sui due condensatori, quindi avremo

$$\frac{q_A}{C_0/2} = \frac{q_B}{C_0} \quad \Rightarrow \quad 2q_A = q_B \,.$$

Da qui ricaviamo $q_B = (4/3)\, q_0$: questo significa che la carica che ha attraversato il resistore è $q_0/3$.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Attribuire 1 punto agli elaborati che presentino due tra questi tre elementi a) dimezzamento della capacità del primo condensatore; b) uguaglianza della tensione alla fine del processo; c) conservazione della carica. Attribuire 2 punti se sono presenti tutti e tre.*

QUESITO n. 10

La forza che il pavimento esercita sulla scatola ha una componente verticale (N, detta reazione normale) e una orizzontale ($F_\mathrm{a} = \mu N$, forza d'attrito).

Poiché la scatola si muove di moto uniforme la risultante delle forze sulla scatola è nulla; separando le componenti verticale e orizzontale e si ha

$$\begin{cases} Mg - N - F \operatorname{sen}\theta = 0 \\ F\cos\theta - \mu N = 0 \end{cases}$$ Ricavando F dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ha

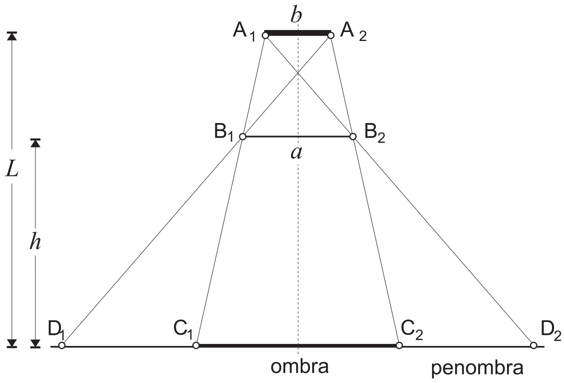
$$N = \frac{Mg}{1 + \mu\tan\theta} = 57.0\,\mathrm{N}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{56.8 \le N \le 57.2 \quad [\mathrm{N}]}$

PROBLEMA n. 1 – Giochi d'ombra

Quesito n. 1.

La figura mostra il percorso dei raggi luminosi che delimitano i confini delle zone d'ombra e di penombra lungo una qualsiasi delle due direzioni parallele ai lati della sorgente. Per fissare le idee, supporremo che il lato della lampada parallelo all'asse x sia b. Verificheremo a posteriori l'esattezza di questa ipotesi.



Consideriamo la direzione corrispondente all'asse x nella figura. Indicando con o_x la larghezza dell'ombra $(\mathrm{C_1C_2})$, e con p_x la distanza $\overline{\mathrm{D_1C_1}} = \overline{\mathrm{D_2C_2}}$, abbiamo $o_x = 18\,\mathrm{cm}$, e $p_x = 12\,\mathrm{cm}$. Per la similitudine dei triangoli che si formano $\mathrm{A_2B_1B_2}$ e $\mathrm{A_2D_1C_2}$ risulta

$$\frac{a}{o_x + p_x} = \frac{L-h}{L}\,.$$

Da qui ricaviamo facilmente il valore di h che risulta $\quad h = \dfrac{L(o_x + p_x - a)}{o_x + p_x} = 2.00\,\mathrm{m}\,.$

Per la similitudine dei triangoli $\mathrm{A_1A_2B_1}$ e $\mathrm{B_1D_1C_1}$ abbiamo

$$\frac{b}{p_x} = \frac{L-h}{h} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{p_x(L-h)}{h} = 6\,\mathrm{cm}\,.$$

Nella direzione parallela all'asse y della figura abbiamo $p_y = 4\,\mathrm{cm}$, da cui $\;c = \dfrac{p_y(L-h)}{h} = 2\,\mathrm{cm}\,.$

Quesito n. 2.

Da quanto visto al punto precedente, il lato della sorgente parallelo all'asse x dell'ombra è proprio quello più lungo (b), come avevamo ipotizzato.

PROBLEMA n. 2 – Riscaldatore elettrico

Quesito n. 1.

I due elettrodi sono i due cilindri, e dunque la corrente elettrica scorre dall'uno all'altro, in direzione radiale. Per la precisione, visto che l'elettrodo positivo è il cilindro interno, la corrente scorre verso l'esterno(*).

Quesito n. 2.

Poiché la corrente scorre in direzione radiale, e poiché $s \ll r$, possiamo considerare il piccolo tratto d'acqua come un conduttore di sezione trasversale $2\pi r\,\Delta x$ e di lunghezza s. Per la seconda legge di Ohm, la sua resistenza è allora

$$R = \rho\frac{s}{2\pi r\,\Delta x}\,.$$

(*) Si potrebbe pensare che la corrente non sia perfettamente radiale, ma che almeno in parte scorra anche parallelamente all'asse dei cilindri, trasportata dal flusso dell'acqua. Ricordiamo che nell'acqua (non distillata) la corrente elettrica è trasportata dagli ioni, positivi e negativi, in essa presenti, a causa della dissociazione elettrolitica dei sali disciolti e, in piccola parte, dell'acqua stessa. Questi ioni subiscono la forza elettrica in direzione radiale, ma anche il moto di trascinamento dell'acqua, e si muovono dunque effettivamente, in media, in direzione obliqua. Se però scomponiamo questo moto obliquo nelle due componenti, quella radiale e quella assiale, vediamo che lungo la direzione radiale ioni positivi e negativi si muovono in verso opposto, e dunque contribuiscono entrambi alla corrente elettrica, mentre parallelamente all'asse dei cilindri cariche positive e negative si muovono nello stesso verso, e dunque non producono una corrente elettrica.

Quesito n. 3.

Il tempo che lo strato impiega a passare attraverso l'intercapedine tra i cilindri è $\Delta t = L/v$. L'acqua si riscalda per effetto Joule. Il calore Q ceduto all'acqua è

$$Q = \frac{V_0^2}{R}\Delta t = \frac{2\pi r\,\Delta x\,V_0^2 L}{\rho s v}\,.$$

Quesito n. 4.

Il calore assorbito provoca il riscaldamento dell'acqua. La relazione tra Q e ΔT è $Q = cm\Delta T$.

La massa dello strato d'acqua vale $m = 2\pi r s\,\Delta x\,\delta$. Di conseguenza

$$\frac{2\pi r\,\Delta x V_0^2 L}{\rho s v} = 2\pi r s\,\Delta x\delta\,c\,\Delta T \quad \text{e quindi} \quad \Delta T = \frac{V_0^2 L}{c\rho s^2\delta v}$$

PROBLEMA n. 3 – Tappeto elastico

Quesito n. 1.

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava che $v_0 = \sqrt{2gh}$. Il moto di C (CdM) è uniformemente accelerato, con accelerazione di modulo g diretta verso il basso. La sua velocità è data da

$$v(t) = v_0 - gt\,.$$

Nel punto di massima altezza $t = t_0/2$ (il tempo di salita è uguale a quello di discesa) e $v = 0$. Abbiamo quindi

$$t_0 = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Allo stesso risultato si può arrivare risolvendo il sistema formato dalle equazioni della posizione e velocità in funzione del tempo

$$\begin{cases} y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v = v_0 - gt \end{cases} \quad \text{in cui si ponga } y = h,\ v = 0 \text{ e } t = t_0/2.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $t_0 = 1.277\,\mathrm{s}$ e $v_0 = 6.263\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.276 \le t_0 \le 1.279 \quad [\,\mathrm{s}\,]}$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{6.257 \le v_0 \le 6.269 \quad [\,\mathrm{m\,s^{-1}}\,]}$

Quesito n. 2.

Quando la ragazzina è in aria, l'unica forza che agisce su di essa è il peso, il cui punto di applicazione (baricentro) coincide col CdM. Il momento delle forze esterne rispetto a C è dunque nullo: ne segue che il momento angolare rispetto a C si conserva durante il volo: se al momento del distacco è nullo, resterà tale durante tutto il volo, e Valeria non potrà iniziare a ruotare su se stessa.

Quesito n. 3.

Il momento angolare ha modulo $L = I\omega$, e poiché durante il volo si conserva, avremo $I_1\omega_1 = I_0\omega_0$. Dato che $I_1 = I_0/4$, ricaviamo immediatamente $\omega_1 = 4\omega_0$.

Quesito n. 4.

Per metà del tempo di volo t_0 Valeria ruota con velocità angolare ω_0, e per la restante metà con velocità angolare $4\omega_0$. In totale completa una rotazione di 2π rad. Abbiamo dunque

$$\omega_0\frac{t_0}{2} + 4\omega_0\frac{t_0}{2} = 2\pi\,\mathrm{rad} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{4\pi}{5t_0} = \frac{2\pi}{5}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

Sostituendo i valori numerici nell'espressione trovata precedentemente troviamo $\omega_0 = 1.968\,\mathrm{rad/s}$.

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.966 \le \omega_0 \le 1.970 \quad [\,\mathrm{rad/s}\,]}$

Quesito n. 5.

L'impulso che la forza normale N, esercitata dal tappeto, trasmette alla ragazzina è $\int_{\Delta t} N\, dt$ (dove l'integrale è esteso al brevissimo intervallo di tempo dell'urto) o, equivalentemente, $N_{\rm m}\Delta t$, dove $N_{\rm m}$ è il valor medio della forza normale. Poiché le altre forze che agiscono sulla ragazzina non sono impulsive, il loro contributo può essere trascurato. Per il teorema dell'impulso, questo è uguale alla variazione della quantità di moto, che risulta $2mv_0$. Abbiamo allora

$$N_{\rm m}\Delta t = 2mv_0 \,.$$

Il momento della forza normale N, calcolato rispetto a C, è $N\,(\ell/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha$. L'integrale di questo momento, $\int_{\Delta t} N(\ell/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha\, dt$ o, equivalentemente, $N_{\rm m}(\ell/2)\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\Delta t$, è uguale alla variazione del momento angolare $\Delta L = I\omega_0$ essendo nullo il momento angolare iniziale.

$$\frac{1}{2} N_m \ell\, \mathrm{sen}\,\alpha\, \Delta t = I\omega_0 \,.$$

Da queste due relazioni si ricava

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{I\omega_0}{mv_0\ell} = \frac{1}{12}\frac{m\ell^2\omega_0}{mv_0\ell} = \frac{\ell\omega_0}{12v_0} = \frac{\ell(2\pi/5)\sqrt{g/2h}}{12\sqrt{2gh}} = \frac{\ell\pi}{60h} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{sen}^{-1}\frac{\ell\pi}{60h} \,.$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo $\alpha = 0.0471\,\mathrm{rad} = 2.70°$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.69 \le \alpha \le 2.71 \quad [\,°\,]}$

Si vede che effettivamente questo angolo è molto piccolo rispetto alla rotazione completa di 360°.

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *È accettabile l'approssimazione di* $\mathrm{sen}\,\alpha$ *con* α.

PROBLEMA n. 4 – Radiazione termica

Quesito n. 1.

Dal primo grafico si legge $I_{\rm s,1}(4\,\mu\mathrm{m}) = 70 \times 10^9\,\mathrm{W/m^3}$ e dal secondo grafico $I_{\rm s,2}(4\,\mu\mathrm{m}) = 25 \times 10^9\,\mathrm{W/m^3}$ pertanto il rapporto η cercato vale

$$\eta = \frac{I_{\rm s,1}(4\,\mu\mathrm{m})}{I_{\rm s,2}(4\,\mu\mathrm{m})} = 2.8 \,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.6 \le \eta \le 3.0 \quad [\,]}$

Quesito n. 2.

Con ovvio significato dei simboli, si ha

$$\begin{cases} \lambda_{\rm m,1} = bT_1^n \\ \lambda_{\rm m,2} = bT_2^n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln(\lambda_{\rm m,1}/\lambda_{\rm m,2})}{\ln(T_1/T_2)} \,.$$

Dal grafico vediamo che $\lambda_{\rm m,1} = 1.4\,\mu$m e $\lambda_{\rm m,2} = 2.2\,\mu$m. Sostituendo i valori numerici (e ricordando che n è intero), otteniamo $n = -1$.

Da qui poi ricaviamo, per ciascuna delle due temperature, $b_1 = 2.80\,\mathrm{mm\,K}$, $b_2 = 2.86\,\mathrm{mm\,K}$ da cui il valore medio $b = 2.83\,\mathrm{mm\,K}$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.63 \le b \le 3.03 \quad [\,\mathrm{mm\,K}\,]}$

Questo valore è in buon accordo con il valore attualmente accettato, che è $2.897\,772\,1(26) \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}$.

Quesito n. 3.

L'intensità della radiazione, cioè la somma dei contributi di ogni lunghezza d'onda, è pari all'area sotto la curva. Questa si può determinare stimando il numero dei quadretti.

Il numero totale di quadretti nel primo grafico è all'incirca $N_1 = 115$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{105 \le N_1 \le 125 \quad [\,]}$

L'area A_1 di un quadretto vale

$$A_1 = 20 \times 10^9\,\mathrm{W\,m^{-3}} \cdot 0.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 8 \times 10^3\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

pertanto l'intensità risulta

$$I_1 = 115 \cdot 8 \times 10^3\,\mathrm{W\,m^{-2}} = 9.2 \times 10^5\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{8.4 \le I_1 \le 10.0 \quad [\,10^5\,\mathrm{W\,m^{-2}}\,]}$

Il numero totale di quadretti nel secondo grafico è all'incirca $N_2 = 201$. RIS $\Rightarrow$ $\boxed{186 \le N_2 \le 216 \quad [\,]}$

L'area A_2 di un quadretto vale

$$A_2 = 0.2 \times 10^{10}\,\mathrm{W\,m^{-3}} \cdot 0.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 8 \times 10^2\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

pertanto l'intensità risulta

$$I_2 = 201 \cdot 8 \times 10^2\,\mathrm{W\,m^{-2}} = 1.61 \times 10^5\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.49 \le I_2 \le 1.73 \quad [10^5\,\mathrm{W\,m^{-2}}]}$

Dalla relazione $I = \sigma T^m$ si ricava il sistema

$$\begin{cases} I_1 = \sigma\, T_1^m \\ I_2 = \sigma\, T_2^m \end{cases} \Rightarrow \quad m = \frac{\ln(I_1/I_2)}{\ln(T_1/T_2)}$$

Sostituendo i valori numerici, e ricordando che m è intero, otteniamo $m = 4$. Per σ, dalla prima equazione si ricava

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{T_1^4} = 5.75 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}},$$

dalla seconda

$$\sigma_2 = \frac{I_2}{T_2^4} = 5.64 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$$

e facendo la media

$$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}},$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{5.3 \le \sigma \le 6.1 \quad [\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}]}$

in ottimo accordo col valore accettato di $5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.

Quesito n. 4.

Secondo la legge di Wien la radiazione solare corrisponde a quella di un corpo nero alla temperatura $T = b/\lambda_\mathrm{m}$.

La potenza solare è determinata dalla legge di Stefan-Boltzmann $W = \sigma T^4 \times 4\pi R_\odot^2$.

L'1 % di massa corrisponde ad un'energia $U = 0.01\,M_\odot c^2$ dove c è la velocità della luce.

Pertanto il tempo t necessario per perdere tale quantità di massa vale

$$t = \frac{U}{W} = \frac{0.01\,M_\odot c^2}{\sigma (b/\lambda_\mathrm{m})^4\,(4\pi) R_\odot^2} = 4.0 \times 10^{18}\,\mathrm{s} = 130 \times 10^9\,\mathrm{anni}.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{3.0 \le t \le 5.0 \quad [10^{18}\,\mathrm{s}]}$

Materiale elaborato dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
e-mail: segreteria@olifis.it - Tel. 0732 1966045
WEB: www.olifis.it