Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

Scuola Normale Superiore

I Giochi di Archimede - Gara Biennio

25 novembre 2015

Risoluzione dei problemi (l'ordine si riferisce al testo T1)

Problema 1. *La risposta è* **(A)**.
Indicato con n il numero di 2 usciti, la somma sarà $2n + 5(200 - n) = 1000 - 3n$, con $0 \leq n \leq 200$. Poiché i possibili valori di n (da 0 a 200) sono in tutto 201 e poiché, variando n, varia la somma suddetta, i possibili valori di tale somma sono appunto 201.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 2. *La risposta è* **(E)**.
Una volta scelta (in 3 modi possibili) la tinta del soffitto, Giovanni ha la scelta di altri 2 colori per la prima parete, mentre il colore delle due pareti verticali adiacenti è per forza il terzo colore non ancora usato; infine, il colore dell'ultima parete, opposta alla prima, risulta determinato anche lui di conseguenza (è l'unico colore differente da quello usato per il soffitto e per le due adiacenti): Giovanni ha pertanto $3 \cdot 2 = 6$ scelte possibili.
(Problema proposto da F. Poloni)

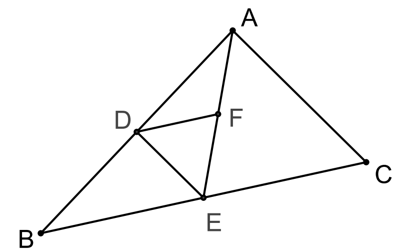
Problema 3. *La risposta è* **(B)**.
Chiamiamo a, b, c, d, e, f le età dei sei amici la cui media è di 14 anni, e g, h, i le età degli altri tre amici di Enea. Sappiamo che $a+b+c+d+e+f = 14 \cdot 6$ e che $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 16 \cdot 9$, dunque $\frac{1}{3}(g+h+i) = \frac{1}{3}(16 \cdot 9 - 14 \cdot 6) = 20$.
(Problema proposto da S. Monica)

Problema 4. *La risposta è* **(A)**.
Poiché $3^4 = 81$, ogni potenza $3^{4n} = (3^4)^n$ termina per la cifra 1. Il numero 8^7 è sicuramente multiplo di 4, pertanto la cifra delle unità di $3^{(8^7)}$ è 1.
(Problema proposto da S. Yang)

Problema 5. *La risposta è* **(D)**.
Giulio non può abbinare due paia di calzini di due colori diversi solo se ha preso, di ciascun colore tranne al più uno, al più un calzino. Il numero massimo di calzini che può aver preso, senza riuscire ad abbinare due paia di colori diversi, si ottiene prendendo tutti i calzini del colore più numeroso ed esattamente un calzino di ogni altro colore. Questo significa prendere tutti e 44 i calzini grigi e poi un singolo calzino dei restanti colori nero, blu e marrone, per un totale di 47 calzini. Non appena Giulio abbia preso almeno 48 calzini, è quindi sicuro di riuscire ad abbinare due paia di colori diversi.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 6. *La risposta è* **(C)**.
Siano m ed f rispettivamente il numero di ragazzi e il numero di ragazze presenti alla festa. Il numero di coppie (ragazzo, ragazza) che si sono viste ballare è per ipotesi uguale a $4m = 3f$; poiché $m = 9$, segue che $f = \frac{4}{3}m = 12$.
(Problema proposto da F. Getman)

Problema 7. *La risposta è* **(C)**.
Essendo AE una mediana del triangolo ABC, l'area di ABE è la metà dell'area di ABC.
Essendo ED una mediana del triangolo ABE, l'area di ADE è la metà dell'area di ABE.
Essendo DF una mediana del triangolo ADE, l'area di DEF è la metà dell'area di ADE.
Pertanto, l'area di DEF è $1/8$ dell'area di ABC.
(Problema proposto da P. Francini)



Problema 8. *La risposta è* **(A)**.
Alla frazione $3/7$ corrisponde il numero periodico $0,\overline{428571}$ e le cifre si ripetono allora ogni sei posti. Poiché $2015 = 6 \cdot 335 + 5$, la 2015.esima cifra sarà uguale alla quinta, e sarà quindi un 7.
(Problema proposto da A. Dal Zotto - S. Pelizzola - R. Zanotto)

Problema 9. *La risposta è* **(B)**.
Poiché $18 = 2 \cdot 3^2$, le cifre che possono apparire nel codice di sblocco sono $1, 2, 3, 6$ e 9.
I codici che contengono la cifra 9 devono contenere la cifra 2 e quella 1 ripetuta due volte: il numero di tali codici è uguale a $4 \cdot 3 = 12$: una volta scelta la posizione del 9 (in 4 modi possibili), si può scegliere la posizione del 2 in 3 modi possibili, dopo di che gli 1 sono obbligati nelle altre posizioni: dunque 12 possibilità in tutto.
I codici che contengono la cifra 6 devono contenere la cifra 3 e quella 1 ripetuta due volte, ed il numero di tali codici è uguale al precedente (12). I codici che contengono la cifra 3, diversi da quelli considerati finora (cioè senza 6 né 9), devono contenerla per forza due volte, insieme ad un 2 e ad un 1; il numero di tali codici è quindi ancora uguale 12 (una volta scelte le posizioni di 1 e 2, le altre due posizioni sono forzate ad ospitare ciascuna un 3). Infine, ogni codice che contiene la cifra 2 deve contenere per forza un 9 oppure due 3, e tali codici sono già stati considerati.
In totale, dunque, il numero dei codici possibili è $3 \cdot 12 = 36$.
(Problema proposto da A. Pesare)

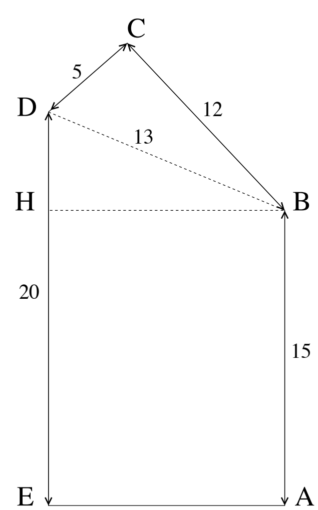
Problema 10. *La risposta è* **(A)**.
I 5 più piccoli divisori di 40! maggiori di 40 sono: 42, 44, 45, 46, 48, i quali si fattorizzano tutti con fattori che ritroviamo tra i numeri da moltiplicare per ottenere 40! (ad esempio $44 = 4 \cdot 11$, $46 = 2 \cdot 23$, etc.). Viceversa, i numeri primi maggiori di 40 non dividono 40!, dato che un numero primo divide un prodotto di interi se e solo se divide uno dei fattori e, chiaramente, nessuno degli interi che vengono moltiplicati per ottenere 40! è divisibile per un numero primo maggiore di 40.
Pertanto, il valore richiesto si trova sommando i 5 numeri sopra elencati, vale a dire 225.
(Problema proposto da P. Francini)

Problema 11. *La risposta è* **(E)**.
Chiamiamo z, p, c le quantità rispettivamente di zucchero, olio di palma e cacao presenti nel prodotto (espresse in percentuale). Sappiamo che $z + p + c = 80$, e che $6 \leq c \leq 14 \leq p \leq z$. La percentuale massima di olio di palma che il prodotto potrebbe contenere si ottiene per i valori minimi c, z degli altri due ingredienti, compatibili con tali equazioni e disequazioni; cioè per $c = 6$ e $z = p$. Dunque $p = (80 - 6)/2 = 37$.
(Problema proposto da F. Poloni)

Problema 12. *La risposta è* **(D)**.
Due persone che siedono l'una accanto all'altra non possono essere entrambe furfanti o entrambe cavalieri. In effetti, se la persona a sinistra, delle due, è un cavaliere allora dice il vero, e quindi il suo vicino di destra è un furfante; viceversa, se la persona a sinistra è un furfante allora dice il falso, e quindi il suo vicino di destra è un cavaliere. Questo mostra che cavalieri e furfanti si alternano al tavolo, e pertanto sono nello stesso numero; in conclusione, i presenti alla riunione sono in numero pari. Sapendo che meno di 100 sono cavalieri, il totale dei presenti è inferiore a 200; la risposta corretta si trova osservando che 168 è l'unico numero pari inferiore a 200 tra quelli elencati.
(Problema proposto da F. Florian)

Problema 13. *La risposta è* **(B)**.
Ogni riga e ogni colonna della griglia contiene un numero dispari di quadratini; pertanto, ogni mossa inverte la parità del numero di caselle scure di quella riga o colonna, e di conseguenza anche la parità complessiva del numero di caselle scure dell'intera griglia.
Dopo dieci mosse, la parità sarà stata scambiata 10 volte, e quindi coinciderà con quella della configurazione iniziale. Poiché all'inizio vi è solo una casella scura, dopo aver effettuato dieci mosse il numero di caselle scure dovrà essere dispari. Tutte le configurazioni mostrate hanno un numero dispari di caselle, tranne la seconda, che è quindi impossibile da ottenere.
È importante osservare che in principio non ogni configurazione con un numero dispari di caselle nere è ottenibile per mezzo di 10 mosse, tuttavia si può verificare come, nei casi proposti, sia sempre possibile ottenere le altre quattro configurazioni eseguendo 10 mosse opportune.
(Problema proposto da F. Mugelli)

Problema 14. *La risposta è* **(C)**.
Tracciata da B la perpendicolare BH al lato DE, si può agevolmente osservare che i triangoli rettangoli BCD e BHD sono congruenti, per cui BH misura 12 m.
In alternativa, si può pervenire allo stesso risultato applicando il teorema di Pitagora prima per determinare la diagonale BD e poi per BH.
L'area del pentagono è dunque data dalla somma tra l'area del rettangolo $ABHE$ e l'area del quadrilatero $BCDH$ (che è il doppio del triangolo rettangolo BCD).
Pertanto, l'area richiesta è data (in m^2) da $15 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 240$.
(Problema proposto da P. Francini)



Problema 15. *La risposta è* **(E)**.
Sia O il centro del piatto circolare ed $x = \overline{OC}$. Il raggio della circonferenza vale dunque $r = x + 6$ e, per il teorema di Pitagora, si ha $(x+6)^2 = r^2 = x^2 + (24/2)^2$, da cui $x = 9$ ed $r = 15$.
(Problema proposto da F. Getman)

Problema 16. *La risposta è* **(C)**.
Se p è un numero primo tale che $2p \leq 60$, poiché 2 e p hanno un multiplo in comune tra quelli utlizzati, segue che le palline coi numeri 2, $2p$ e anche p dovranno essere colorate nello stesso modo. Pertanto, una volta scelto il colore per la pallina n°2, lo stesso colore va impiegato per tutti i numeri primi che non superano 30 e, di conseguenza, per tutte le palline che hanno tali numeri tra i loro fattori.
I soli numeri che restano esclusi, dunque, dal colore scelto per la pallina n°2 sono i numeri primi maggiori di 30, vale a dire 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, che Gianni può colorare liberamente.
È possibile usare quindi al più 8 colori.
(Problema proposto da A. Pesare)