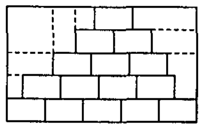
I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

3 dicembre 1997

B	A	D	E	C	D	E	C	D	C	D	D	D	C	C	C	D	C	E	B	B	C	B	B	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**.
Costruiamo il rettangolo con base e altezza uguali a quelle della figura che contiene la figura stessa. Proiettando i segmenti che formano il perimetro della figura parallelamente a sé stessi (verso l'esterno) sui lati del rettangolo, si vede che il perimetro del rettangolo viene ricoperto esattamente, e quindi il perimetro della figura è uguale a quello del rettangolo.

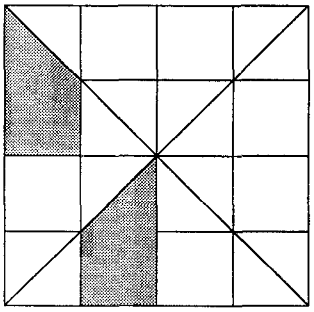


2) La risposta è **(A)**.
Essendo $0 < y < 1$, allora sarà anche $0 < \sqrt{y} < 1$. Moltiplicando per x si ha che $0 < x\sqrt{y} < x$.

3) La risposta è **(D)**.
Si ha infatti $f(2) = \dfrac{2f(1)+1}{2}$ cioè $2 = \dfrac{2f(1)+1}{2}$, da cui $4 = 2f(1)+1$ ed infine $f(1) = \dfrac{3}{2}$.

4) La risposta è **(E)**.
Poiché in ogni caso, partendo da un numero maggiore, una mossa permette di arrivare ad un numero maggiore, è chiaro che la migliore strategia si ottiene massimizzando il risultato di ciascun passo. Pertanto conviene al primo passo raddoppiare, ottenendo 2; il secondo passo è indifferente e fornisce 4; da questo punto in poi conviene sempre prendere il quadrato, che è maggiore del doppio. Quindi il massimo ottenibile dopo n mosse è $4^{2^{n-2}} = 2^{2^{n-1}}$.

5) La risposta è **(C)**.
Suddividendo la figura come illustrato, si vede che la superficie ombreggiata è $3/16$ del totale. $3/16 = 0{,}1875 = 18{,}75\%$.



6) La risposta è **(D)**.
Una strategia possibile prevede di aprire i due anelli di una coppia e utilizzarli per formare con le altre coppie due catene di cinque anelli ciascuna. Basta allora aprire uno degli anelli di una catena e unirla all'altra. Vi sono anche altre strategie in tre passi, ma nessuna in due. Infatti, se ad un certo istante le catene presenti hanno come lunghezze massime l_1 e l_2, la lunghezza massima ottenibile al passo successivo è ovviamente $l_1 + l_2 + 1$. Pertanto dopo un passo le lunghezze massime saranno 5 e 2, e dopo due passi la massima lunghezza ottenibile è 8.

7) La risposta è **(E)**.
I vari numeri possono essere scritti così:

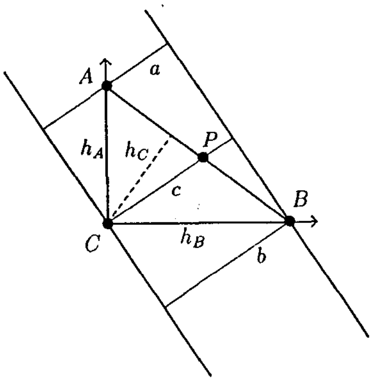
$$0{,}0000001 = 10^{-7} \qquad (0{,}1)^{0{,}1} = 10^{-1/10} \qquad \sqrt{0{,}00001} = 10^{-5/2} \qquad (0{,}0001)^2 = 10^{-8}$$

inoltre si ha che $9^{-8} > 10^{-8}$, quindi la risposta corretta è la **(E)**.

8) La risposta è **(C)**.
Poiché la superficie totale è 6 volte l'area di una faccia, anche le facce hanno rapporto $2:1$. Poiché l'area di una faccia è il quadrato dello spigolo, il rapporto fra gli spigoli è $\sqrt{2}:1$. Dunque i volumi, che sono il cubo dei corrispondenti spigoli, stanno fra loro nel rapporto $(\sqrt{2})^3 : 1$, cioè $2\sqrt{2}$.
(Nel caso generale di figure $n-$dimensionali ottenute tramite omotetia di rapporto t, le misure $n-$dimensionali stanno nel rapporto t^n. Dunque nell'ipotesi dell'esercizio si ha $t^2 = 2$, dunque $t^3 = 2^{3/2}$).

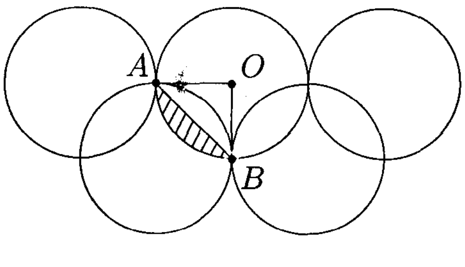
9) La risposta è **(D)**.
In effetti, è ben possibile che io sia un ghiottone che mangia sempre troppo!
Si noti che tutte le altre conclusioni sono correttamente deducibili dalle premesse:
(A) per la transitività dell'implicazione l'ipotesi implica entrambe le tesi;
(B) perché la tesi è più debole del semplice mangiar troppo che già segue dall'ipotesi;
(C) è semplicemente la contronominale della prima premessa;
(E) è la contronominale dell'implicazione ottenuta dalle due premesse per transitività.

10) La risposta è **(C)**.
La larghezza minima della striscia è uguale alla minima delle altezze del triangolo ABC. Infatti, supponiamo di avere una striscia che contiene interamente il triangolo ABC, e siano a, b, c i segmenti tra le due rette che delimitano la striscia, perpendicolari ad esse e passanti rispettivamente per A, B, C. Tutti e tre questi segmenti hanno lunghezza l pari alla larghezzza della striscia. Se almeno due di questi segmenti coincidono, per esempio a e b, allora $l \geq AB \geq h_A$, dove h_A è l'altezza dal vertice A. Se i segmenti sono tutti distinti, sia per esempio c quello centrale. Allora c taglia il lato AB in un punto P interno alla striscia, per cui $l \geq CP \geq h_C$. In ogni caso l è maggiore o uguale ad una delle tre altezze del triangolo.
D'altra parte, se h_C è l'altezza minima (o una delle altezze minime, in caso di coincidenze) la striscia compresa tra la retta passante per A e B e la retta ad essa parallela passante per C ha lunghezza uguale ad h_C e contiene tutti i tre punti.
Nel caso proposto, il triangolo ABC è rettangolo e le sue altezze sono $h_A = 15$, $h_B = 20$, $h_C = 12$.



11) La risposta è **(D)**.
Le due equazioni date sono infatti equivalenti alle seguenti: $2^x = 2^{2(y+1)}$ e $3^{3y} = 3^{x+1}$, da cui $x = 2y+2$ e $3y = x+1$. Sostituendo il valore di x dalla prima delle due equazioni nella seconda, si ottiene $3y = 2y+3$, da cui $y = 3$, $x = 8$ e $x+y = 11$.

12) La risposta è (**D**).



Tracciando i due raggi OA e OB e la corda AB, si osserva che l'area tratteggiata in figura può essere ottenuta come differenza fra l'area del settore circolare AOB, pari a $\pi/4$ cm^2 e l'area del triangolo AOB pari a $1/2$ cm^2. L'area richiesta può essere determinata moltiplicando per 8 la differenza fra le due aree precedentemente calcolate, e vale quindi $8 \times (\pi/4 - 1/2)$ cm$^2 = 2 \times (\pi - 2)$ cm^2.

13) La risposta è (**D**).

Infatti, se esce 1, 2, 3, 4 si vincono rispettivamente 7, 8, 9, 10 gettoni; se invece esce 5 o 6 si vincono 0 gettoni. Poiché tutti i casi sono equiprobabili, si vincono $\frac{7+8+9+10+0+0}{6} = \frac{34}{6}$ gettoni in media, e poiché tale quantità è minore di 6, conviene fermarsi.

14) La risposta è (**C**).

Infatti l'età media può essere ottenuta col seguente calcolo

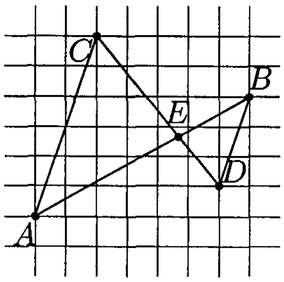
$$\frac{3 \times \left(14 + \frac{2}{12}\right) + 2 \times \left(13 + \frac{4}{12}\right)}{2+3} = \frac{68 + \frac{14}{12}}{5} = \frac{65}{5} + \frac{3}{5} + \frac{14}{60} = 13 + \frac{36+14}{60} = 13 + \frac{10}{12}$$

cioè 13 anni e 10 mesi.

15) La risposta è (**C**).

Per le proprietà dei radicali si ha: $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{2^5}} = \sqrt[20]{2^5} = \sqrt[4]{2}$.

16) La risposta è (**C**).



Dalla figura risulta che i segmenti AC e BD sono paralleli, e dunque i triangoli AEC e BED sono simili. Pertanto $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BD} = 2$.

17) La risposta è (**D**).

Infatti si ha che $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}+2)^2}{5-4} = 5 + 4 + 4\sqrt{5} = 9 + 4\sqrt{5}$.

L'intero più vicino a $4\sqrt{5} = \sqrt{80}$ è $9 = \sqrt{81}$.

18) La risposta è (**C**).

Si verifica che:

se il primo gennaio cade di:	allora c'è un venerdì 13 nei mesi di:
lunedì	aprile, luglio
martedì	settembre, dicembre
mercoledì	giugno
giovedì	febbraio, marzo, novembre
venerdì	agosto
sabato	maggio
domenica	gennaio, ottobre.

In un anno non bisestile ci possono essere al più tre venerdì 13 e ciò si verifica se e solo se il primo gennaio di quell'anno è giovedì. La prossima volta che ciò si verificherà sarà nel 1998.

19) La risposta è (**E**).
Osserviamo che $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ è pari perché in S ci sono un numero pari di addendi dispari. Più precisamente si ha la formula

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2} = 5050 \, .$$

Se cambiamo il segno $+$ in segno $-$ per un dato numero, la somma totale dimuisce del *doppio* del numero modificato: così ad esempio

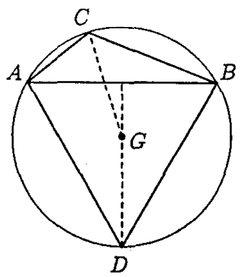
$$1 + 2 + \cdots - i + \cdots + \cdots + 100 = S - 2i$$

È chiaro allora che la parità della somma non può cambiare e, dato che S è un numero pari, non potremo mai ottenere 1997, un numero dispari.

20) La risposta è (**B**).
Se $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 60$, allora $x + y = a$ e $x - y = b$ con $ab = 60$; inoltre $a > b$ poiché x e y sono positivi. Le possibilità di ottenere 60 come prodotto di due interi positivi a, b con $a > b$ sono elencate nella tabella a fianco.
D'altra parte, si ha $x = \dfrac{a+b}{2}$ e $y = \dfrac{a-b}{2}$; i valori di x e y risultano interi se e solo se $a + b$ e $a - b$ sono entrambi pari, cioè se e solo se a e b sono entrambi pari o entrambi dispari. Pertanto le coppie $(a,\ b)$ che danno luogo a valori interi di x e y sono solo $(30,\ 2)$ e $(10,\ 6)$

a	b
60	1
30	2
20	3
15	4
12	5
10	6

21) La risposta è (**B**).
Sia D il terzo vertice del triangolo equilatero. Poiché gli angoli in C e in D sono supplementari, il quadrilatero $ACBD$ risulta essere inscrittibile in una circonferenza, il cui centro coincide con il baricentro G di ABD. Pertanto la lunghezza di CG è uguale al raggio della circonferenza circoscritta ad ABD, che vale $AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{3}$ cm $= \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ cm.



22) La risposta è (**C**).
La probabilità che il numero 13 venga estratto in una città è $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$; la probabilità che *non* venga estratto è dunque $\frac{17}{18}$. Ne segue che la probabilità che il numero 13 venga estratto a Milano, ma non a Roma e a Napoli, è $\frac{1}{18} \times (\frac{17}{18})^2$. La stessa cosa vale per la probabilità che il 13 sia estratto solo a Roma o solo a Napoli. Poiché questi tre casi sono mutualmente esclusivi, la probabilità richiesta è

$$p = 3 \times \frac{1}{18} \times \left(\frac{17}{18}\right)^2 \quad \text{cioè} \quad p = \frac{1}{6}\left(\frac{17}{18}\right)^2 \, .$$

Poiché si ha che

$$1 > \left(\frac{17}{18}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{18}\right)^2 > 1 - \frac{2}{18} = \frac{8}{9}$$

allora $\dfrac{1}{6} > p > \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{8}{9} = \dfrac{4}{27}$ e poiché $\dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{27} < \dfrac{4}{27}$ si ha $\dfrac{1}{9} < p < \dfrac{1}{6}$.

23) La risposta è (**B**).
Ogni palindromo con un numero pari $2n$ di cifre produce esattamente un palindromo con $2n - 1$ cifre (cancellando una delle due cifre centrali), ed in tal modo si ottengono tutti i palindromi con $2n - 1$ cifre. Inoltre produce 10 palindromi di $2n + 1$ cifre (intercalando una cifra qualsiasi al centro), e di nuovo così si ottengono tutti. Pertanto $p_5 = p_6$ e $p_7 = 10 p_6$.

24) La risposta è (**B**).

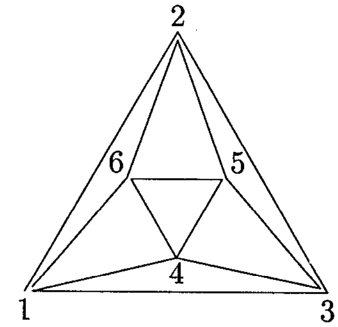
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{ab+a+b+1}{ab}=1+\frac{2}{ab}$$

e, poiché a parità di somma di due numeri il prodotto è massimo quando i due numeri sono uguali, il minimo si ottiene quando $a=b=\frac{1}{2}$.

SECONDA SOLUZIONE Poiché $a+b=1$, la soluzione si ottiene per $a=b=1/2$. Se infatti a e b non fossero uguali, per simmetria potremmo supporre $a>1/2>b$. Posto $a=1/2+c$, $b=1/2-c$ si avrebbe:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3/2+c}{1/2+c}\cdot\frac{3/2-c}{1/2-c}=\frac{9-4c^2}{1-c^2}>9=\left(1+\frac{1}{1/2}\right)^2 .$$

25) La risposta è (**C**).



Condizione necessaria e sufficiente affinché una figura possa essere percorsa con un cammino che passi una ed una sola volta per tutti i lati è che il numero di lati che concorre in ogni vertice della figura sia pari tranne al più due vertici nei quali possono concorrere un numero dispari di lati. Infatti in ogni vertice, salvo eventualmente quello di partenza e quello di arrivo, dovrà concorrere un ugual numero di lati *entranti* e di lati *uscenti* (cioè percorsi avvicinandosi verso il vertice ed allontanandosi da esso).

L'unica figura con questa proprietà fra quelle date è la (**C**), nei cui vertici concorrono 4 lati. Il disegno sopra dimostra che per questa figura è effettivamente possibile trovare un cammino con la proprietà richiesta. Numeriamo i vertici come in figura. Un percorso possibile è, per esempio, quello che tocca i vertici nell'ordine 1, 2, 3, 1, 4, 5, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 1.