I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

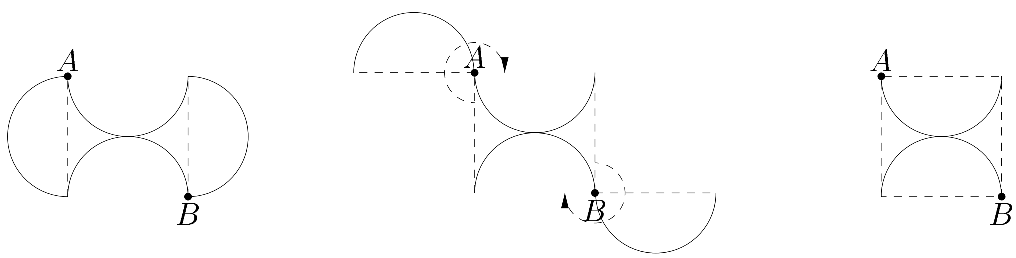
5 dicembre 2000

B	C	A	D	B	A	E	C	C	B	D	C	B	B	C	D	C	A	B	C	C	B	C	C	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(B)**.
Dopo 3 ore, il podista avrà percorso 27 km. Poiché 26 km corrispondono all'andata e ritorno fra A e B, egli si troverà a 1 km da A. Nello stesso tempo, il ciclista avrà percorso 75 km, tre in meno rispetto a tre volte l'andata e ritorno fra A e B: perciò egli si troverà a 3 km da A. La loro distanza sarà dunque di $3 - 1 = 2$ km.

2) La risposta è **(C)**.
Un numero maggiore di 1 elevato ad una potenza positiva è maggiore di 1, elevato ad una potenza negativa è minore di 1: questo esclude la risposta **(B)**. Un numero positivo minore di 1 elevato ad una potenza positiva è minore di 1 (e questo esclude le risposte **(A)**, **(D)** ed **(E)**), mentre elevato a una potenza negativa è maggiore di 1: questo è il caso della risposta **(C)**.

3) La risposta è **(A)**.
Decomponendo la figura data seguendo le linee tratteggiate e ricomponendola ruotando i due semicerchi in senso orario di 270° intorno ad A e B rispettivamente (vedi figure sottostanti), si ottiene un quadrato avente il lato lungo 10 cm la cui area, equivalente a quella della figura data, è 100 cm^2.



4) La risposta è **(D)**.
Ogni anno che passa l'età del padre aumenta di uno, mentre la somma di quelle dei figli aumenta di tre; pertanto la differenza diminuisce di due, e quindi si annulla dopo dodici anni.

5) La risposta è **(B)**.
Infatti, ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e che AN e CM sono bisettrici degli angoli in A e C, si ha che

$$\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 2(P\hat{A}C + P\hat{C}A) = 180° - 2(180° - A\hat{P}C) = 100°.$$

6) La risposta è **(A)**.
La somma di tre numeri consecutivi è sempre multipla di tre, quindi nessuno dei numeri considerati è primo, dato che tutti possiedono il fattore tre, per il ben noto criterio di divisibilità.

7) La risposta è **(E)**.
Chiamiamo, per esempio, base del triangolo il lato lungo 4. L'area del triangolo è uguale a 2

un altro lato. L'uguaglianza tra queste due quantità, e quindi la massima area, si ha quando i due lati di lunghezza 4 e 5 sono perpendicolari. Applicando il teorema di Pitagora, si ha $x = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$.

8) La risposta è **(C)**.
Ogni sera di un giorno dispari del mese la tela è cresciuta di 1 cm, mentre la sua lunghezza è rimasta invariata alla sera di ogni giorno pari. I giorni dispari dell'anno 1999 sono stati 16 per ciascuno dei sette mesi di 31 giorni, 15 per ciascuno dei 4 mesi di 30 giorni e 14 nel mese di febbraio. La lunghezza della tela alla fine dell'anno era pertanto di $16\times 7+15\times 4+14 = 186$ cm.

9) La risposta è **(C)**.
Le ragazze sono il 60 %, i non castani il 40 %, i maggiorenni il 10 %. Anche se non vi fosse nessuna sovrapposizione, il totale arriverebbe al 90 % e avanzerebbe il 10 % di maschi minorenni castani.
D'altra parte, le affermazioni **(A)**, **(B)**, **(D)** ed **(E)** possono essere false, come si può vedere dal seguente esempio di una scuola con 1000 studenti:
se nella scuola ci sono 400 ragazze, tutte minorenni e bionde, e 600 ragazzi tutti castani, di cui 500 minorenni e 100 maggiorenni, tutte le affermazioni riportate nel testo sono vere, ma le **(A)**, **(B)**, **(D)**, **(E)** sono false.

10) La risposta è **(B)**.
Si possono ricavare successivamente i valori di $a,\ b,\ c,\ d$. Da $\frac{1}{a} = 2$ si ottiene $a = \frac{1}{2}$; da $a+\frac{1}{b} = 2$ si ottiene $b = \frac{2}{3}$; da $b+\frac{1}{c} = 2$ si ottiene $c = \frac{3}{4}$; da $c+\frac{1}{d} = 2$ si ottiene $d = \frac{4}{5}$. Ne segue che $abcd = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

11) La risposta è **(D)**.
Una squadra imbattuta dopo quattro giornate ha necessariamente un punteggio pari, ma 6 non è accettabile, dato che la squadra di Marco deve aver vinto la prima partita, pareggiato la terza e perso almeno una delle altre due; 4 invece è possibile se i risultati sono stati M=VSPS, R=PPPP (V=vittoria, S=sconfitta, P=pareggio).

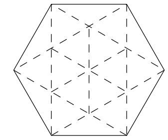
12) La risposta è **(C)**.
Indichiamo con P ed L, rispettivamente, i prezzi delle materie prime e della lavorazione dell'anno scorso. Tenendo conto degli aumenti, quest'anno i due prezzi sono rispettivamente $2P$ e $11L/10$. Si ottiene così il sistema

$$P+L = 10, \qquad 2P+11L/10 = 12,$$

dal quale si ricava che $P = 10/9$. Per avere il prezzo delle materie prime di quest'anno basta moltiplicare per 2, ottenendo $20/9$, che è compreso tra 2 e 3.

13) La risposta è **(B)**.
Tracciando le linee indicate in figura, si verifica facilmente che l'esagono viene diviso in 18 triangoli equivalenti. Infatti le diagonali uscenti da ciascun vertice dividono la diagonale congiungente i due vertici adiacenti a quello scelto in 3 parti uguali e i sei triangoli ottusangoli hanno la stessa base e la stessa altezza dei triangoli equilateri. Poiché l'area del poligono stellato è data dalla

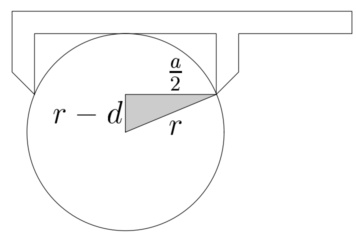
somma delle aree dei 12 triangoli equilateri (tutti uguali fra loro), il rapporto fra le aree è $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.



14) La risposta è **(B)**
Ragioniamo prima secondo l'ora italiana. Un periodo di 53 ore e 53 minuti equivale a 2 giorni, 5 ore e 53 minuti. Pertanto per calcolare quandi si è svegliato Emanuele basta togliere 5 ore e 53 minuti alle 11:11. Il modo più comodo per eseguire tale calcolo è di togliere 6 ore e poi aggiungere 7 minuti. Si ottiene così facilmente che l'ora richiesta è data dalle 5:18 (ora italiana). Per ottenere l'ora coreana basta aggiungere 7 all'ora italiana. Pertanto Emanuele si è svegliato alle 12:18 (ora coreana).

15) La risposta è **(C)**.
Si ha $f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4 \cdot 4^x - 4^x = 3 \cdot 4^x = 3f(x)$.

16) La risposta è **(D)**.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo in grigio in figura si ha: $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r-d)^2$ da cui $2rd = d^2 + \frac{a^2}{4}$ e infine $r = \frac{d}{2} + \frac{a^2}{8d}$. Il diametro sarà il doppio di tale quantità, cioè $d + \frac{a^2}{4d}$.



17) La risposta è **(C)**.
I fattori 63 e 65 ci sono certamente, in quanto
$2^{48} - 1 = (2^{24}+1)(2^{24}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) = (2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$
e $2^6 - 1 = 63$, $2^6 + 1 = 65$.

18) La risposta è **(A)**.
Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$. Poiché $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$, si ha $abc = -40$. Poiché $ab = 10$, si ha che $c = -4$. Inoltre, $a+b+c = 3$, da cui $a+b = 7$ e $c(a+b) = (-4) \times 7 = -28$.

Seconda soluzione.
Usando la fattorizzazione precedente, si ottiene $ab + ac + bc = 10 + c(a+b) = -18$, da cui $c(a+b) = -28$.

19) La risposta è **(B)**.
L'apotema della piramide è pari all'altezza di un triangolo equilatero di lato unitario, e vale quindi $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'altezza h della piramide può essere calcolata applicando il teorema di Pitagora ad un triangolo rettangolo che ha per cateti h e metà lato di base, e per ipotenusa l'apotema; quindi $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il volume della piramide è quindi $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Poiché $2000 = 2^4 5^3$, si deve avere $a = 2^x 5^y$, $b = 2^s 5^t$, dove il massimo fra x e s è uguale a 4 e il massimo fra y e t è uguale a 3. Osserviamo che non si può avere contemporaneamente $x = 4$ e $s = 4$, poiché, dovendo essere $y = 3$ o $t = 3$, si avrebbe che uno fra i numeri a e b dovrebbe essere uguale a 2000. Supponiamo che $x = 4$. Allora $y = 0, 1, 2$, poiché $a \neq 2000$. Ne segue che si deve avere $t = 3$ e, poiché nemmeno b può essere uguale a 2000, $s = 0, 1, 2, 3$. Quindi in questo caso ci sono $3 \times 4 = 12$ possibilità per la coppia (a, b). Simmetricamente, se $s = 4$, ci sono altre 12 possibilità, per un totale di 24 possibilità.

21) La risposta è **(C)**.
Consideriamo i sei quadrati di lato uno costituiti dai punti (x, y) tali che $i \leq x \leq i+1$ e che $j \leq y \leq j+1$, con $i = 0, 1$ e $j = 0, 1, 2$. L'intersezione di ognuno di questi quadrati con D è il triangolo giacente nella parte superiore sinistra rispetto alla diagonale che unisce i punti (i, j) e $(i+1, j+1)$, pertanto la sua area è uguale a $\frac{1}{2}$. Moltiplicando per 6, si ottiene che l'area di D è uguale a 3.

22) La risposta è **(B)**.
L'unico triangolo rettangolo che si possa costruire con lati di lunghezza intera compresi fra 1 e 6 ha i lati di lunghezza 3, 4 e 5. La probabilità che i lanci producano i tre risultati 3, 4 e 5 è: $\frac{3}{6}$ (probabilità che il primo lancio dia uno dei tre risultati), moltiplicato per $\frac{2}{6}$ (probabilità che il secondo lancio dia uno degli altri due risultati), moltiplicato per $\frac{1}{6}$ (probabilità che il terzo lancio dia l'ultimo risultato). In totale, la probabilità è quindi $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

23) La risposta è **(C)**.
Chiara non può essere arrivata prima, perché almeno una fra Anna e Barbara mente. Chiara non può essere arrivata seconda, perché in questo caso dovrebbe essere arrivata prima di almeno una fra Anna e Barbara; quindi sia lei che una di queste due direbbe la verità, contro le ipotesi. Pertanto Chiara mente; ma allora non può essere arrivata ultima, poiché o Anna o Barbara dice la verità. Pertanto Chiara è arrivata terza.
Osserviamo che, se Anna e Barbara sono arrivate una prima di Chiara e l'altra dopo, le ipotesi sono comunque verificate. Pertanto non si può stabilire né chi è arrivata prima, né chi è arrivata seconda, né chi è arrivata ultima.

24) La risposta è **(C)**.
Per contare con cura le combinazioni che il ladro dovrà provare procediamo come segue.
Contiamo le combinazioni del tipo $xyww$, con x, y e w tutte diverse. Sono $10 \times 9 \times 8$ e sono tante quante quelle del tipo $xyyw$ e quelle del tipo $xxyw$. Le combinazioni $xyyy$ sono tante quante le $xxxy$ e sono 10×9; quelle del tipo $xxyx$ e $xyxx$ sono $90 \times 2 = 180$. Infine le $xxyy$ sono 10×9 (tante quante le $xyyx$) e le $xxxx$ sono 10. Pertanto il numero di combinazioni è

$$720 \times 3 + 90 \times 2 + 90 \times 2 + 90 \times 2 + 10 = 2710.$$

Seconda soluzione. Le combinazioni possibili di un lucchetto a 4 cifre sono $10^4 = 10000$ (ogni cifra ha 10 scelte possibili). Quelle che NON hanno due cifre consecutive sono $10 \times 9 \times 9 \times 9 = 7290$ (la prima cifra può essere qualsiasi, per tutte le altre si deve escludere la possibilità che siano uguali alla precedente). Quindi quelle che hanno almeno due cifre consecutive sono $10000 - 7290 = 2710$.

Gli spigoli AC e BC, così come gli spigoli AD e BD, insieme con AB formano un triangolo. Pertanto $AC + BC > 54$ e $AD + BD > 54$. Poiché la somma di 20 con qualsiasi fra i numeri 32, 32, 29, 27 è inferiore a 54, lo spigolo di lunghezza 20 non può essere nessuno fra AC, BC, AD, BD, e quindi deve essere CD (lo spigolo opposto ad AB).

Seconda soluzione

Per dimostrare che il lato CD è lungo 20, dimostriamo che nessun altro lato del tetraedro può essere lungo 20. Se infatti così fosse, il lato lungo 20 avrebbe un estremo in comune con il lato AB (osserviamo che CD è l'unico lato del tetraedro a non avere estremi in comune con AB). Ma allora ci sarebbe una faccia del tetraedro con un lato lungo 54, un lato lungo 20, ed un lato la cui lunghezza può essere 32, 29 o 27. Ma questo non è possibile visto che in ogni triangolo il lato più lungo deve essere maggiore della somma degli altri due.

Osservazione

Per convincersi dell'esistenza di un tetraedro con le misure date si può fare la seguente costruzione. Consideriamo un triangolo ABC di lati $AB = 54$, $AC = 32$, $BC = 27$, ed il triangolo ABD di lati $AB = 54$, $AD = 32$, $BD = 29$. Supponiamo inoltre che C e D stiano in semipiani diversi rispetto alla retta AB. Con qualche calcolo (non semplicissimo) si vede che in tale configurazione la distanza tra C e D è > 20. Supponiamo ora di ruotare nello spazio di 180 gradi il triangolo ABD intorno alla retta AB. Alla fine il punto D si sarà spostato in un punto D', situato dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB. In tale configurazione si ha (con qualche calcolo) che $CD' < 20$. Pertanto durante la rotazione deve esistere una posizione in cui la distanza tra C e D è esattamente 20. In tale posizione i punti $ABCD$ determinano il tetraedro cercato.