Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2000-2001
P.N.I.
Sessione suppletiva

l candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 9 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1.

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

***a*)** Si esprima, in funzione di k, il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo;
***b*)** si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;
***c*)** si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in *b*), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;
***d*)** si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

Problema 2.

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto.
Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

***a*)** le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

***b*)** nel caso di cui al punto *a*);

***c*)** nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia la sezione aurea dell'altezza.

Questionario.

1. Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

2. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}.$$
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

3. Dire quale è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

4. Calcolare, integrando per parti:
$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

5. Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di *"concetto primitivo"* e di *"assioma"*.

6. Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, ..., 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7. Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9. Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

.....se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse. (Paradiso, XIII, 101-102)

Leggiamolo insieme

Problema 1

È un problema di geometria piana, che richiede il calcolo del massimo del raggio del cerchio inscritto in un triangolo di date caratteristiche. I ragionamenti necessari per calcolare il raggio del cerchio inscritto sono sintetici, mentre la seconda parte del problema introduce i metodi della geometria analitica.

Che cosa ripassare?

Le progressioni aritmetiche. La formula che fornisce il raggio del cerchio inscritto in un triangolo qualsiasi. La formula di Erone. La circonferenza nel piano cartesiano. La formula che fornisce il volume della sfera.

Problema 2

Si tratta, in sostanza, di un classico problema di minimo riguardante una figura solida.

Che cosa ripassare?

Le formule del volume e della superficie totale del cilindro. Le unità di misura della capacità e del volume. Il concetto di sezione aurea di un segmento.

Soluzione del problema 1

L'ipotesi "a, b, c sono in progressione aritmetica" significa che vi è una differenza costante fra a e b e fra b e c. Indichiamo con k tale differenza, supponendo a il lato minore e c il maggiore, cosicché $k \geq 0$. Potremo perciò scrivere

(1) $\quad a = b - k \;,\quad c = b + k$

(figura 1).

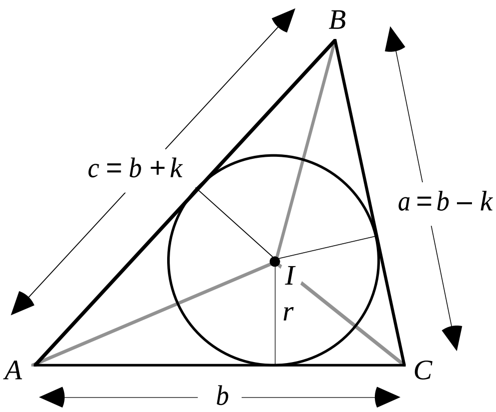


figura 1

Domanda *a*): raggio del cerchio inscritto.

Il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo è espresso dalla formula (cfr.2.30)

(2) $\quad r = \dfrac{A}{p}$ dove $A = Area\ triangolo$, $p = semiperimetro$

(la formula si ricava facilmente scomponendo il triangolo *ABC* nei tre triangoli *ABI*, *ACI*, *BCI*, essendo *I* l'*incentro* di *ABC* (figura 1); esprimendo ora l'area di *ABC* come somma delle aree di tali triangoli, che hanno tutti altezza *r*, si ha

$$A = \frac{1}{2}(a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r) = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$$

da cui segue subito la (2)).

Attualmente, tenendo presente la (1), abbiamo

(3) $$p = \frac{1}{2}[(b-k) + b + (b+k)] = \frac{3}{2}b$$

Del triangolo *ABC* si conoscono soltanto le misure dei lati; la sua area A può essere calcolata mediante la Formula di Erone (cfr.2.15). Tenendo presenti le espressioni (1) delle misure dei lati e la (3) per il semiperimetro, abbiamo

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3}{2}b\left(\frac{3}{2}b - b + k\right)\left(\frac{3}{2}b - b\right)\left(\frac{3}{2}b - b - k\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}b^2\left(\frac{1}{2}b + k\right)\left(\frac{1}{2}b - k\right)} = \sqrt{\frac{3}{16}b^2\left(b^2 - 4k^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}b \cdot \sqrt{b^2 - 4k^2}$$

e quindi

(4) $$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}b\sqrt{b^2 - 4k^2}}{\frac{3}{2}b} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{b^2 - 4k^2} = f(k).$$

È utile qualche osservazione riguardo al <u>dominio</u> della funzione $f(k)$ che esprime il valore di r.

Imponendo la positività del radicando si ottiene $-\frac{b}{2} \le k \le \frac{b}{2}$; poiché abbiamo supposto anche $k \ge 0$, rimane $0 \le k \le \frac{b}{2}$.

Quale significato geometrico ha questa limitazione?

Le espressioni (1) dei tre lati manifestano chiaramente la necessità che sia $k \le b$, affinché le misure siano non negative. La più restrittiva condizione $k \le \frac{b}{2}$ corrisponde alla *disuguaglianza triangolare*: la misura di ciascun lato di un triangolo deve essere minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due.

Imponendo nel nostro caso che il lato maggiore sia minore o uguale della somma degli altri due otteniamo infatti

$$b + k \le (b-k) + b \ ; \quad 2k \le b \ ; \quad k \le \frac{b}{2}.$$

Domanda *b*): valore di k che rende massimo r.

La determinazione del valore di k che rende massimo il valore di r ricavato in (4) è immediata. Non occorre calcolare derivate: l'espressione $b^2 - 4k^2$ è in ogni caso $\leq b^2$, e l'uguaglianza si realizza se e solo se $k = 0$; il massimo valore di r si ha quando $k = 0$, ed in tal caso è $\frac{\sqrt{3}}{6}b$

Geometricamente, questo corrisponde al triangolo equilatero, in quanto le misure dei tre lati risultano tutte uguali a b.

Domanda *c*): circonferenze inscritta e circoscritta ad *ABC*.

Il triangolo *ABC* è attualmente equilatero, con lati di misura *b*. Scegliamo il sistema di riferimento con l'origine nel punto medio di *AC* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *AC* (figura 2). Le coordinate dei vertici sono allora

$$B\left(0\,,\frac{b}{2}\sqrt{3}\right),$$

$$A\left(-\frac{b}{2}\,,0\right),\ C\left(\frac{b}{2}\,,0\right).$$

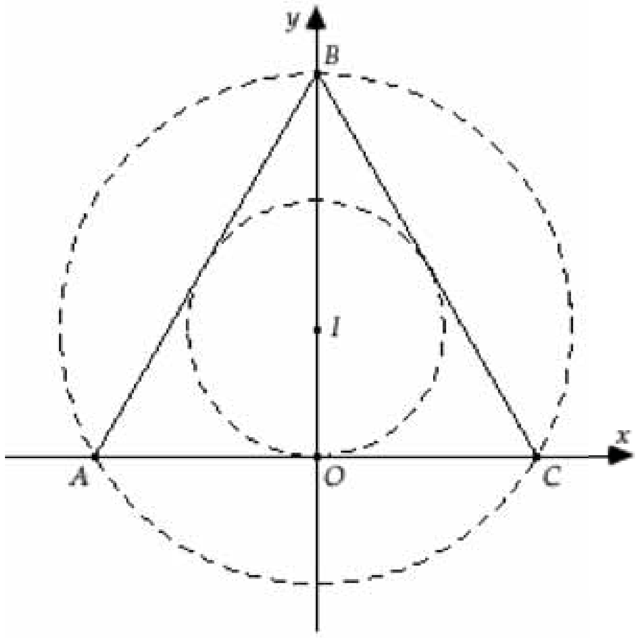


figura 2

Poiché il triangolo è equilatero, l'incentro I coincide con il circocentro e con il baricentro; perciò I si trova sull'altezza (e mediana) AO a distanza da O uguale a $\frac{1}{3}\overline{AO} = \frac{b}{6}\sqrt{3}$:

$$I\left(0\,,\frac{b}{6}\sqrt{3}\right).$$

Il cerchio inscritto ha centro in I e passa per O; il suo raggio è quindi uguale a $\frac{b}{6}\sqrt{3}$. La sua equazione è pertanto (cfr.3.22)

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^2 \quad ; \qquad x^2 + y^2 - \frac{b}{3}\sqrt{3}\,y = 0.$$

Il cerchio circoscritto ha ancora il centro in I, e passa per B; il suo raggio è quindi uguale a $\frac{b}{3}\sqrt{3}$. La sua equazione è pertanto

$$x^2+\left(y-\frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 \quad ; \qquad x^2+y^2-\frac{b}{3}\sqrt{3}\,y-\frac{1}{4}b^2=0$$

Domanda *d*): Rapporto fra i volumi delle sfere.

Non c'è alcuna difficoltà nel calcolare i volumi delle due sfere in questione, poiché sono noti i rispettivi raggi: $r=\frac{b}{6}\sqrt{3}$, $R=\frac{b}{3}\sqrt{3}$. I volumi delle due sfere sono perciò (cfr.2.64):

$$v=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{b}{6}\sqrt{3}\right)^3 \quad , \qquad V=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^3$$

Svolgendo il calcolo si trova

$$\frac{v}{V}=\frac{1}{8}.$$

In effetti il calcolo esplicito dei volumi delle due sfere è superfluo: è sufficiente osservare che il rapporto fra i loro raggi è $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$; il rapporto fra i volumi è uguale al <u>cubo</u> del rapporto fra i raggi, cioè a $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, come già avevamo ottenuto.

Soluzione del problema 2

Domanda *a*): cilindro di superficie minima.

Evidentemente il significato della domanda è: determinare il cilindro di minima superficie totale, fra quelli di assegnato volume.

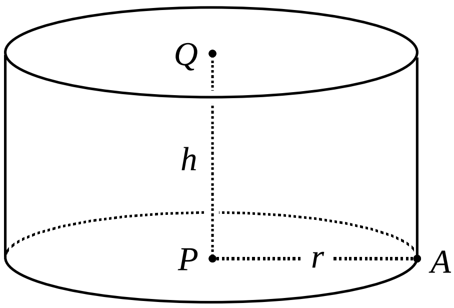


figura 3

Siano r e h il raggio di base e l'altezza del cilindro, e V il suo assegnato volume. Cerchiamo di esprimere la superficie del cilindro in funzione del volume, assegnato, e del raggio, incognito.

Il volume del cilindro è (cfr.2.53)

$$V = \pi r^2 h$$

e quindi

(1) $$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

La superficie totale del cilindro è invece (cfr.2.52)

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

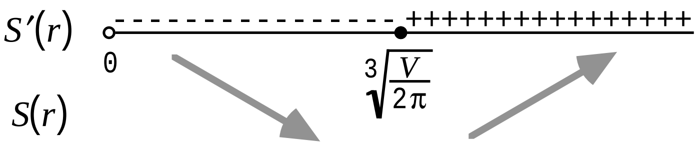
Sostituendo l'espressione di h data in (1) si ottiene

(2) $$S(r) = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Questa è la funzione della quale dobbiamo determinare il minimo; il dominio nel quale essa va studiata è l'intervallo $]0, +\infty[$.
La derivata rispetto all'incognita r è

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{2}{r^2}\left(2\pi r^3 - V\right)$$

il cui segno nell'intervallo $]0, +\infty[$ varia come indica il seguente schema, nel quale sono riportati anche gli intervalli in cui S è crescente o decrescente.



Perciò il cilindro di superficie totale minima si ottiene quando $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. La corrispondente altezza si ottiene sostituendo in (1) questo valore di r:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 V^3}{V^2 \pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

Il calcolo mostra che il cilindro di superficie totale minima, con volume assegnato, è quello equilatero, cioè quello in cui l'altezza è uguale al diametro della base.

dimensioni del cilindro di minima superficie totale

con assegnato volume V

raggio base: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; *altezza*: $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Domanda *b*): valori di r e h nel caso in cui $V = 2$ dl.

Si tratta di un calcolo ovvio; la sola difficoltà consiste nel tradurre l'espressione del volume in unità di misura compatibili con misure di lunghezza, per esempio, centimetri.

Poiché 1 litro equivale a 1000 cm^3, 2 decilitri equivalgono a 200 cm^3; per ottenere le misure in cm di r e h basta quindi sostituire nei risultati poc'anzi ottenuti V con 200:

$$\boxed{\textit{raggio base}:\ r=\sqrt[3]{\frac{200}{2\,\pi}}\ \text{cm}=\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ \text{cm}\quad ;\qquad \textit{altezza}:\ h=2\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ \text{cm}}$$

Domanda *c*): valori di r e h nel caso in cui $V = 2$ dl e il diametro di base sia la sezione aurea dell'altezza.

Non c'è più riferimento con la domanda ***a***). Il testo assegna il volume del cilindro: 200 cm^3 e il rapporto fra diametro di base ed altezza, tramite la "sezione aurea".
Ricordiamo che la sezione aurea di un segmento AB è un segmento AC il quale, se costruito in modo che C appartenga al segmento AB, realizza la proporzione

(3) $$AB : AC \;=\; AC : CB$$

cioè, la sezione aurea di AB è media proporzionale fra AB e la parte rimanente (figura 4).

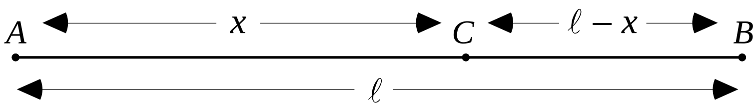


figura 4

Dalla (3) è facile ricavare il "rapporto aureo", cioè il rapporto fra AC e AB. Se $\overline{AB}=\ell$ e $\overline{AC}=x$, da (3) segue

$$\ell : x = x : (\ell - x) \quad ; \qquad x^2 = \ell^2 - \ell x \quad ; \qquad x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

da cui, tenendo presente che solo la soluzione positiva è accettabile,

(4) $$x = \frac{-\ell + \ell\sqrt{5}}{2} \quad \text{e quindi} \quad \frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \left(\text{rapporto aureo}\right).$$

Perciò i dati attualmente a disposizione riguardo al cilindro sono:

(5) $$\pi r^2 h = 200\ \text{cm}^3\ (\textit{volume})\ ; \quad \frac{2r}{h} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ (\textit{rapporto aureo}).$$

Le due relazioni di (5) formano un sistema di due equazioni dal quale dobbiamo ricavare r e h.

Dalla seconda di (5) ricaviamo

(6) $$h = \frac{4r}{\sqrt{5}-1}.$$

Sostituendo questa nella prima di (5) e svolgendo i calcoli otteniamo

$$\frac{4\pi r^3}{\sqrt{5}-1} = 200\ \text{cm}^3 \quad ; \quad r^3 = \frac{50\left(\sqrt{5}-1\right)}{\pi}\ \text{cm}^3 \quad ; \quad r = \sqrt[3]{\frac{50\left(\sqrt{5}-1\right)}{\pi}}\ \text{cm}$$

e infine, sostituendo in (6) il valore di r testé ottenuto,

$$h = \frac{4}{\sqrt{5}-1}\sqrt[3]{\frac{50\left(\sqrt{5}-1\right)}{\pi}}\ \text{cm} = \sqrt[3]{\frac{64\cdot 50\left(\sqrt{5}-1\right)}{\pi\left(\sqrt{5}-1\right)^3}}\ \text{cm} = \sqrt[3]{\frac{64\cdot 50}{\pi\left(6-2\sqrt{5}\right)}}\ \text{cm} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32\cdot 50\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\pi\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}}\ \text{cm} = \sqrt[3]{\frac{400\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\pi}}\ \text{cm}\ .$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Misure del cilindro con "rapporto aureo":}\\ r = \sqrt[3]{\dfrac{50\left(\sqrt{5}-1\right)}{\pi}}\ \text{cm} \quad ; \quad h = \sqrt[3]{\dfrac{400\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\pi}}\ \text{cm}\end{array}}$$

Questionario

Quesito 1

È un quesito teorico di Analisi Matematica riguardante i Teoremi di Rolle e Lagrange e le applicazioni di quest'ultimo alla monotonia delle funzioni.

Il Teorema del valor medio di Lagrange è il seguente:

Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è una funzione:*
(i) *continua in* $[a, b]$
(ii) *derivabile in* $]a, b[$.

Tesi: *Esiste almeno un punto* $c \in\ ]a, b[$ *tale che* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Il Teorema di Rolle è invece il seguente:

Ipotesi: $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è una funzione:*
(i) *continua in* $[a, b]$
(ii) *derivabile in* $]a, b[$.
(iii) *Risulta* $f(a) = f(b)$.

Tesi: *Esiste almeno un punto* $c \in \left]a, b\right[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Il Teorema di Rolle può apparire come un corollario del Teorema di Lagrange: se è $f(a) = f(b)$, allora $f(b) - f(a) = 0$, e la tesi del Teorema di Lagrange coincide in tal caso con quella del Teorema di Rolle. Nello sviluppare la teoria però non è possibile questa presentazione, perché il Teorema di Rolle è uno strumento indispensabile per dimostrare il Teorema di Lagrange: il Teorema di Rolle va quindi provato indipendentemente da quello di Lagrange, e prima di esso.
Le dimostrazioni a cui accenniamo sopra si possono trovare in ogni buon testo di Analisi Matematica.

Fra le applicazioni più significative del Teorema di Lagrange vi è la seguente, che mette in relazione il segno della derivata di una funzione in un intervallo con la sua monotonia:

Ipotesi.
$I \subseteq \mathbf{R}$ *è un intervallo e* $f : I \to \mathbf{R}$ *è una funzione derivabile in I.*

Tesi.
(i) *Se* $f'(x) \geq 0\ \ \forall\, x \in I$ *allora* f *è* ***crescente*** *in* I.
(ii) *Se* $f'(x) \leq 0\ \ \forall\, x \in I$ *allora* f *è* ***decrescente*** *in* I.
(iii) *Se* $f'(x) = 0\ \ \forall\, x \in I$ *allora* f *è* ***costante*** *in* I.

Riportiamo la facile dimostrazione.
f è crescente [rispettivamente: decrescente; costante] se, per ogni $a, b \in I$ con $a < b$ risulta $f(a) \leq f(b)$ [rispettivamente: $f(a) \geq f(b)$; $f(a) = f(b)$].
Per fissare le idee, ragioniamo sulla (i); supponiamo $f'(x) \geq 0$ $\forall\, x \in I$, e dimostriamo che f è <u>crescente</u> in I. Presi $a, b \in I$ con $a < b$ vogliamo provare che $f(a) \leq f(b)$.
Poiché I è un intervallo e $a, b \in I$, risulta $[a, b] \subseteq I$. Perciò f è derivabile, quindi anche continua, nell'intervallo $[a, b]$.
f soddisfa in $[a, b]$ le ipotesi del Teorema di Lagrange. Per tale Teorema esiste $c \in \left]a, b\right[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Per ipotesi è $f'(c) \geq 0$, quindi $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$. Inoltre, per la scelta di a e b, è $b - a > 0$. Concludiamo che $f(b) - f(a) \geq 0$, cioè $f(a) \leq f(b)$ come volevamo dimostrare.

Lo stesso ragionamento mostra che se l'ipotesi su f' è $f' \leq 0$ oppure $f' = 0$, allora f risulta decrescente oppure (rispettivamente) costante.
Il ragionamento mostra l'importanza dell'ipotesi "I intervallo". Se il dominio di f non è un intervallo, cioè ha delle "interruzioni", le conclusioni del precedente Teorema non valgono più. Il seguente Quesito 2 fornisce un esempio che illustra questa affermazione.

Quesito 2

Si deve studiare una funzione assegnata, in particolare traendo conseguenze dalle proprietà della sua derivata.

La derivata della funzione data è

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\,\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Il risultato (derivata identicamente nulla) richiama il Teorema ricordato nel precedente Quesito 1:

(*iii*) *Se* $f'(x) = 0 \;\; \forall\, x \in I$ *allora* f *è **costante** in* I.

Questa proposizione <u>non è</u> tuttavia immediatamente applicabile al caso attuale, perché il dominio naturale di f è

$$D = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[\equiv I_1 \cup I_2$$

il quale <u>non è</u> un intervallo.
Non possiamo quindi concludere che f è costante nel suo dominio: possiamo invece affermare che f *è costante in ciascuno dei due intervalli* I_1 *e* I_2; ma il valore costante assunto da f in I_1 non è detto che coincida con il valore assunto in I_2.
Per accertarci su come stanno veramente le cose, calcoliamo il valore di f in un punto di I_1 e in un punto di I_2.

Risulta $0 \in I_2$ e $f(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 - \operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{\pi}{4}$; quindi

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \quad \forall\, x \in \left]-1, +\infty\right[.$$

Non ci sono in I_1 valori di x in cui sia altrettanto facile calcolare il valore di $f(x)$. Ma siccome sappiamo che f è costante in I_1, tale valore costante può anche essere ottenuto calcolando il limite:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(1) = -\frac{3\pi}{4}$$

e quindi

$$f(x) = -\frac{3\pi}{4} \qquad \forall\, x \in \left]-\infty, -1\right[.$$

Avremmo anche potuto calcolare, per esempio

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} - \operatorname{arc\,tg}\left(2+\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4} .$$

Chi non ricordasse che $\operatorname{arc\,tg}\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{12}$ lo può verificare con la calcolatrice, avendo cura di predisporla nella modalità DEG: il calcolo di $\tan^{-1}\left(2+\sqrt{3}\right)$ fornisce il risultato 75, facilmente riconoscibile come la misura in gradi dell'angolo di $\frac{5\pi}{12}$ rad.

La figura 5 rappresenta il grafico di *f*.

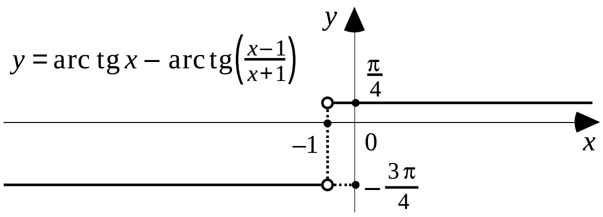


figura 5

Quesito 3

Sono poste alcune semplici questioni riguardanti una funzione, di cui è assegnata l'espressione.

L'espressione $x^{\pi} - \pi^{x}$ è la differenza fra la *funzione potenza* con esponente π, e la *funzione esponenziale* con base π.

La funzione esponenziale è definita in tutto **R**; invece la funzione potenza, poiché l'esponente è un numero positivo non intero, è definita in $\left]0, +\infty\right[$. Questo intervallo è il dominio di *f*.

Le derivate prima e seconda di *f* si calcolano senza difficoltà (cfr.5.12):

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^{x} \cdot \ln\pi \quad ; \qquad f''(x) = \pi(\pi-1)x^{\pi-2} - \pi^{x} \cdot (\ln\pi)^2 ;$$

il loro valore nel punto $x = \pi$ è

(1) $\quad f'(\pi) = \pi^{\pi} \cdot (1 - \ln\pi) \quad ; \qquad f''(\pi) = \pi(\pi-1)\pi^{\pi-2} - \pi^{\pi} \cdot (\ln\pi)^2 .$

Per stabilire il segno di $f'(\pi)$ e di $f''(\pi)$ il metodo più banale consiste nel calcolare il valore di queste espressioni mediante una calcolatrice; si ottiene $f'(\pi) = -5,277\ldots < 0$ e $f''(\pi) = -22,924\ldots < 0$.

È tuttavia più elegante riconoscere il segno di $f'(\pi)$ e di $f''(\pi)$ mediante un ragionamento; questo ci mette anche al riparo da eventuali errori nell'uso della calcolatrice.

Cominciamo con $f'(\pi) = \pi^{\pi} \cdot (1 - \ln \pi)$. Poiché $\pi > e$, è $\ln \pi > \ln e = 1$.

Allora $1 - \ln \pi < 0$; Poiché $\pi^{\pi} > 0$, risulta $f'(\pi) < 0$.

Passiamo a $f''(\pi)$. L'espressione ottenuta in (1) può scriversi:

$$f''(x) = \pi^{\pi-1}\left(\pi - 1 - \pi \cdot (\ln \pi)^2\right) \; = \; \pi^{\pi-1}\left[\pi\left(1 - (\ln \pi)^2\right) - 1\right].$$

Ragionando come sopra si vede che $1 - (\ln \pi)^2 < 0$, e quindi $\pi\left(1 - (\ln \pi)^2\right) < 0$; a maggior ragione $\pi\left(1 - (\ln \pi)^2\right) - 1 < 0$. Il fattore $\pi^{\pi-1}$ è positivo; se ne trae che anche $f''(\pi) < 0$.

Quesito 4

Si deve calcolare un semplice integrale; il metodo appropriato (l'integrazione per parti) è suggerito dal testo.

Si ha (cfr.5.27)

$$(1) \qquad \int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx \; = \; \underbrace{\left[x \cdot \operatorname{arcsen} x\right]_0^1}_{=\frac{\pi}{2}} - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

Il secondo integrale è di facile esecuzione se si osserva che la derivata dell'argomento della radice è $-2x$ e che quindi esso può essere ricondotto ad un integrale della forma:

$$\int \left(f(x)\right)^n \cdot f'(x) \, dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + C$$

con $n = -\frac{1}{2}$, a patto di moltiplicare e dividere la funzione integranda per -2; da (1) si procede dunque così:

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\left[\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Quesito 5

È richiesta una breve esposizione sulle nozioni di "concetto primitivo" e "assioma".

Il quesito riprende le questioni già proposte nel quesito 9 della prova 2001 per Corsi Sperimentali, sessione ordinaria;

raccomandiamo perciò di consultare anche la trattazione di tale Quesito.

La *definizione* di un oggetto (concreto o astratto; non necessariamente in ambiente matematico) consiste nel descrivere tale oggetto servendosi di termini il cui significato sia già conosciuto. È ciò che realizza un vocabolario della lingua italiana (ma anche di un'altra lingua): esso descrive ciascun vocabolo della lingua italiana con altre parole della stessa lingua. Evidentemente, uno straniero che non conosce *nessuna* parola della lingua italiana non può imparare nulla della nostra lingua da un vocabolario di italiano. Le prime parole che ciascuno di noi ha appreso sono state illustrate mostrando l'oggetto corrispondente: *"questo è un libro"*.

In matematica la conoscenza di oggetti "per ostentazione" non è possibile, trattandosi di concetti ideali, anche nei casi in cui la matematica si propone di descrivere fenomeni reali. Una *retta* o un *numero* sono oggetti inesistenti in natura; non è possibile *mostrarli*, e neppure *definirli* mediante concetti più elementari. Occorre assumerli come *concetti primitivi*, ossia nozioni che non è possibile definire, le quali costituiscono i punti di partenza per lo sviluppo di ogni teoria matematica.

Lo sviluppo della teoria consiste nello scoprire *proprietà* degli oggetti dello studio, vale a dire nel *dimostrare teoremi* riguardanti tali oggetti. Ma ciò significa mostrare come certe proprietà seguano quali conseguenze di altre; si capisce allora che le proprietà più elementari (o meglio: le *prime* proprietà che si vogliono riconoscere) non hanno la possibilità di essere dimostrate, e vanno quindi assunte come vere; esse costituiscono i fondamenti della teoria, e si chiamano *assiomi*.
Mediante i concetti primitivi e gli assiomi si *definiscono* nuovi enti e si *dimostrano* Teoremi, ossia nuove proprietà degli oggetti primitivi o successivamente definiti.
Per esempio, in Geometria sono primitive le nozioni di *punto*, *retta* e *appartenenza di un punto a una retta.*
Sono invece assiomi i fatti che:

- *due punti distinti appartengono a una ed una sola retta*
- *è possibile ordinare una retta, ossia stabilire su di essa un verso di percorrenza, in esattamente due modi, uno opposto all'altro.*

Quest'ultimo assioma permette in particolare di definire, dati due punti A e B su di una retta r, l'insieme dei punti che *stanno fra A e B*: essi sono i punti C i quali, nell'orientamento di r nel quale A precede B, sono tali che A precede C e C precede B.

Questo insieme è *per definizione*, il *segmento* AB.

In questo modo la teoria si arricchisce di nuovi oggetti, con i quali se ne potranno definire altri ancora; riguardo a questi oggetti verranno dimostrati nuovi Teoremi, e così via.

Quesito 6

Si tratta di un esercizio di calcolo delle probabilità, per il quale si può utilizzare il Teorema della probabilità composta. La formulazione del problema lascia intendere che l'estrazione dei due numeri avvenga "senza reintroduzione"; svolgiamo il problema in base a questa ipotesi. Sarebbe stato opportuno che il testo avesse chiarito in modo più esplicito questo fatto.

Risolviamo il problema applicando la formula della probabilità condizionale, nel modo seguente:
Siano A, B gli eventi:

A: «entrambe le cifre estratte sono dispari»

B: «la somma delle cifre estratte è pari»

Dobbiamo calcolare $P(A|B)$. Per il Teorema della probabilità composta (cfr.7.5) si ha

(1) $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

I valori di $P(AB)$ e $P(B)$ si calcolano facilmente in modo diretto, con la definizione classica: rapporto fra il numero di esiti favorevoli e il numero di esiti possibili.
Gi esiti favorevoli all'evento congiunto AB (entrambe le cifre estratte sono dispari, e la loro somma è pari) sono gli stessi favorevoli all'evento A, perché se entrambe le cifre estratte sono dispari, necessariamente la somma è pari. Si tratta dei sottoinsiemi con 2 elementi dell'insieme $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Il loro numero è $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Gli esiti possibili nella estrazione sono invece tutti i sottoinsiemi con 2 elementi di $\{1, 2, \dots, 9\}$. Il loro numero è $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$. Dunque

(2) $$P(AB) \quad (= P(A)) \quad = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Calcoliamo ora $P(B)$. L'evento B si verifica se le cifre estratte sono entrambe dispari (e ciò, lo abbiamo già calcolato, si può realizzare in $\binom{5}{2} = 10$ modi), oppure se le cifre estratte sono entrambe pari: ciò

si può realizzare in tanti modi quanti sono i sottoinsiemi con 2 elementi di $\{2,4,6,8\}$: in $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ modi.
Complessivamente l'evento B ha $10+6=16$ possibilità di verificarsi, sui 36 esiti possibili. Perciò

(3) $$P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Sostituendo in (1) i valori calcolati in (2) e (3) otteniamo

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{18}\cdot\frac{9}{4} = \frac{5}{8}.$$

Il problema poteva essere risolto ancora più semplicemente ricorrendo in modo diretto alla definizione di *probabilità condizionale*: $P(A|B)$ significa «la probabilità di *A*, assumendo che gli esiti possibili siano soltanto quelli favorevoli a *B*».
Ebbene, gli esiti favorevoli a *B* sono le coppie di numeri entrambi dispari oppure entrambi pari: le possibilità sono

$$\binom{5}{2}+\binom{4}{2} = 10+6 = 16.$$

Gli esiti favorevoli ad *A*, *limitatamente a quelli favorevoli anche a B*, sono le coppie di numeri entrambi dispari; esse sono in numero di $\binom{5}{2}=10$. Perciò

$$P(A|B) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

come avevamo già ottenuto.

Quesito 7

Si deve provare esistenza e unicità della soluzione di un'equazione in un dato intervallo; lo strumento fondamentale per questo scopo è il Teorema di Bolzano.
Successivamente va calcolata un'approssimazione numerica di tale soluzione. Anche in questo caso il testo non esplicita la precisione richiesta: noi utilizzeremo il metodo di Newton e il metodo delle corde congiunti procedendo fino a determinare una soluzione con un errore inferiore a 10^{-2}.

Chiamata $f(x)=x^3-2x-5$ si ha

$$f(2)=8-4-5=-1<0 \quad , \qquad f(3)=27-6-5=16>0$$

Poiché f è continua in **R**, ed in particolare in $[2,3]$, per il Teorema di Bolzano esiste *almeno* un punto $c \in]2,3[$ tale che $f(c)=0$.
Per provare l'*unicità* di *c*, calcoliamo la derivata di *f*:

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Questa è positiva per valori di *x* esterni all'intervallo $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$; in particolare, è positiva in tutto l'intervallo $[2,3]$. Perciò f è strettamente crescente in $[2,3]$ e quindi non può avere più di uno zero in tale intervallo.

Per determinare la soluzione (con un errore inferiore a 10^{-2}, valore fissato da noi) utilizziamo il metodo di Newton e quello delle corde congiunti. La derivata seconda della funzione *f* è infatti: $f''(x) = 6x$, pertanto f è convessa in $[2,3]$; in tali condizioni il metodo di Newton fornisce una successione che converge decrescendo alla soluzione, mentre il metodo delle corde fornisce una soluzione che converge crescendo alla soluzione. Applicando entrambi i metodi si ottengono quindi degli intervalli di lunghezza sempre minore che contengono la soluzione richiesta. Per una esposizione più dettagliata dei due metodi si veda la soluzione del quesito 2 proposto nella sessione suppletiva P.N.I. 2000.
Applicando il metodo di Newton dovremo considerare la successione definita per ricorrenza da:

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad \text{che nel nostro caso è} \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{2 \cdot x_n^3 + 5}{3 \cdot x_n^2 - 2} \end{cases}$$

I primi termini della successione sono:

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 2,36, \quad x_2 = 2,127197, \quad x_3 = 2,095136.$$

Applicando il metodo delle corde la successione definita per ricorrenza è:

$$\begin{cases} z_0 = a \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n \cdot f(b) - b \cdot f(z_n)}{f(b) - f(z_n)} \end{cases}$$

che nel nostro caso diventa:

$$\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{-3 \cdot z_n^3 + 22 z_n + 15}{-z_n^3 + 2 z_n + 21} \end{cases}$$

I primi termini della successione sono:

$$z_0 = 2, \quad z_1 = 2,058824, \quad z_2 = 2,081264, \quad z_3 = 2,089639.$$

Abbiamo quindi stabilito che la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è un numero appartenente all'intervallo:

$$]2,089639; 2,095136[.$$

Poiché la lunghezza di tale intervallo è 0,005497 uno qualsiasi dei suoi estremi fornisce un'approssimazione della soluzione con un errore inferiore a 0,005497.

Quesito 8

Si tratta di un semplice problema di geometria dello spazio, riguardante un cilindro equilatero e la sfera ad esso circoscritta.

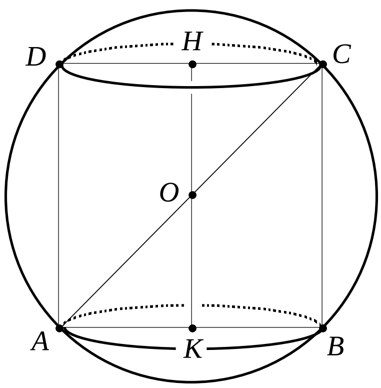


figura 6

Sia R il raggio della sfera, r il raggio di base del cilindro (figura 6). Poiché il cilindro è equilatero, la sua altezza è uguale a $2r$.

Conviene ragionare su una sezione piana del solido, con un piano passante per l'asse del cilindro (figura 7).

La sezione del cilindro è un quadrato *ABCD* inscritto nella circonferenza sezione della sfera con detto piano. Allora $\overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB}$, cioè $2R = \sqrt{2} \cdot 2r$, $R = r\sqrt{2}$.

Calcoliamo le superfici totali dei due solidi.

La superficie totale del cilindro è (cfr.2.52)

$$S_1 = 2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

La superficie totale della sfera è (cfr.2.63)

$$S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2r^2 = 8\pi r^2.$$

Il rapporto richiesto è quindi

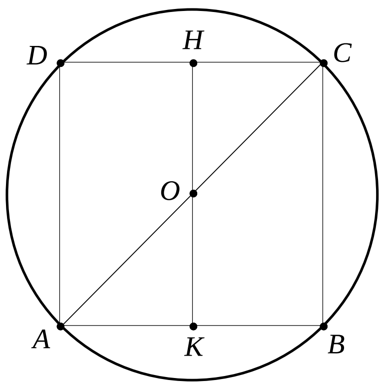


figura 7

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$

Quesito 9

Si deve trattare una semplice questione di geometria piana.

La risposta è negativa. Sia infatti $A\hat{C}B$ un angolo che insiste sul diametro AB di una circonferenza (figura 8)

Il corrispondente angolo al centro è l'angolo piatto $A\hat{O}B$.
Poiché l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro, $A\hat{C}B$ è necessariamente un angolo retto.

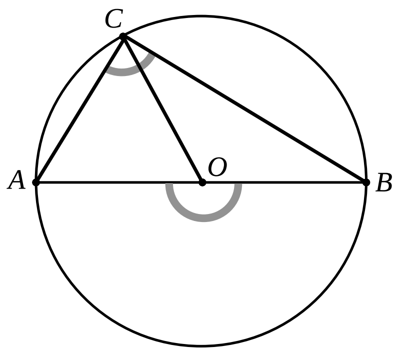


figura 8

Un altro possibile ragionamento è il seguente: se conduciamo il segmento CO abbiamo $AO = BO = CO$. Il triangolo ABC è quindi rettangolo in C perché la mediana relativa al lato AB è uguale alla metà del lato stesso.
Questa proprietà caratterizza i triangoli rettangoli, infatti in tal caso i due triangoli AOC e COB sono isosceli e dunque risulta

$$O\hat{C}A = O\hat{A}C, \quad O\hat{C}B = O\hat{B}C.$$

Poiché la somma delle misure dei quattro angoli a due a due uguali è 180° si ha $A\hat{C}B = A\hat{C}O + O\hat{C}B = 90°$.