Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2000-2001
Sessione suppletiva

l candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1.

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m}$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.

b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo ave determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

Problema 2.

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$ dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo γ tale che $\text{sen}\, \gamma = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

c) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

Questionario.

1. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.

B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

a) **A** vera - **B** vera;
b) **A** vera - **B** falsa;
c) **A** falsa - **B** vera;
d) **A** falsa - **B** falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD' in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9. Calcolare la derivata della funzione $\operatorname{sen} 2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata.

10. Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

a) necessaria e sufficiente;
b) necessaria ma non sufficiente;
c) sufficiente ma non necessaria;

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Leggiamolo insieme

Problema 1

Si tratta di un problema di analisi matematica, concernente una famiglia di funzioni contenenti un valore assoluto. Dopo averne studiato continuità e derivabilità al variare del parametro, viene scelta e studiata una particolare funzione della famiglia.

Che cosa ripassare?

Le proprietà delle funzioni con valore assoluto; la continuità e la derivabilità delle funzioni. Le proprietà delle funzioni razionali. Le applicazioni del calcolo integrale per il calcolo delle aree.

Problema 2

Si tratta di un classico problema di geometria dello spazio, che termina con due problemi di massimo. È un problema abbastanza complesso che richiede nozioni di trigonometria e una buona capacità di visualizzare le figure nello spazio. Come sempre in questi casi, è consigliabile disegnare le sezioni piane della figura sulle quali si svolgono le diverse fasi del ragionamento.

Che cosa ripassare?

I teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli; il teorema delle tre perpendicolari. Le formule per il volume di una piramide, il volume e la superficie totale e superfici totali di un prisma.

Soluzione del problema 1

Domanda *a*): Per determinare l'**insieme di definizione** della funzione f_m poniamo

(1) $$|x-2m|+m \neq 0.$$

Tale condizione è certamente verificata se $m>0$, perché la somma di addendi positivi non può essere nulla.
Se invece $m<0$ (e quindi $-m>0$), vanno esclusi dal dominio di f_m i valori di x tali che

(2) $$|x-2m| = -m$$

Poiché il secondo membro di (2) è positivo, la (2) è verificata se

$$x-2m=-m \quad \text{oppure} \quad -x+2m=-m$$

da cui si ricava rispettivamente: $x=m$; $x=3m$.
Osserviamo che, se $m<0$, risulta $3m<m$.
In conclusione il dominio di f_m è:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{per } m>0: \quad D(f_m)=\mathbf{R}; \\ \text{per } m<0: \quad D(f_m)=\left]-\infty,3m\right[\cup\left]3m,m\right[\cup\left]m,+\infty\right[.\end{array}}$$

Per quanto riguarda la **continuità**, la funzione valore assoluto è una funzione continua e dunque, per qualsiasi valore non nullo di m, la funzione f_m risulta continua su tutto il suo dominio in quanto composizione di funzioni continue. Osserviamo in particolare che nel caso di $m<0$ i valori $x=m$, $x=3m$ <u>non sono</u> punti di discontinuità, perché non appartengono al dominio.

Studiamo ora la **derivabilità** di f_m. La funzione valore assoluto non è derivabile nei punti in cui si annulla il suo argomento. L'unico punto del suo dominio in cui f_m potrebbe non essere derivabile è dunque $x = 2m$. Per determinare l'insieme di derivabilità di f_m analizziamo dunque il comportamento nel punto $x = 2m$. Poiché possiamo scrivere

$$f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-m} & \text{se} \quad x \geq 2m \\ \dfrac{x^2}{3m-x} & \text{se} \quad x < 2m \end{cases}$$

risulta:

$$f'_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2mx}{(x-m)^2} & \text{se} \quad x > 2m \\ \dfrac{6mx-x^2}{(3m-x)^2} & \text{se} \quad x < 2m \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \to 2m^-} f'_m(x) = \lim_{x \to 2m^-} \frac{6mx-x^2}{(3m-x)^2} = 8\,; \quad \lim_{x \to 2m^+} f'_m(x) = \lim_{x \to 2m^+} \frac{x^2-2mx}{(x-m)^2} = 0\,.$$

Poiché i due limiti sono diversi e finiti, nel punto $x = 2m$ la funzione non è derivabile ed ha un punto angoloso. Quindi, per ogni valore non nullo di m, f_m è derivabile in ogni punto del suo dominio ad esclusione di $x = 2m$.

Domanda *b*): Studio della funzione: $f_1(x) = \dfrac{x^2}{|x-2|+1}$ definita, per quanto osservato in precedenza, per ogni $x \in \mathbf{R}$.
Distinguendo i due casi originati dal valore assoluto l'espressione di $f_1(x)$ diventa:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{3-x} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

Intersezione con gli assi e segno:
La funzione è sempre positiva e interseca gli assi nel punto $(0, 0)$.

Limiti nei punti di frontiera del dominio ed eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty;$$

Poiché in entrambi i casi il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, si avranno due asintoti obliqui. Calcoliamo le equazioni degli asintoti, ad iniziare da quello relativo a $x \to -\infty$:

$$m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x-x^2} = -1 ;$$

$$q_1 = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3-x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3-x} = -3$$

pertanto la retta di equazione $y = -x-3$ è asintoto obliquo per la curva C_1 quando x tende a $-\infty$. Poi:

$$m_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1 ;$$

$$q_2 = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

pertanto la retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per la curva C_1 quando x tende a $+\infty$.

Derivata prima ed eventuali estremi relativi.

Come già calcolato si ha

$$f_1'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} & \text{se} \quad x > 2 \\[2ex] \dfrac{6x-x^2}{(3-x)^2} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

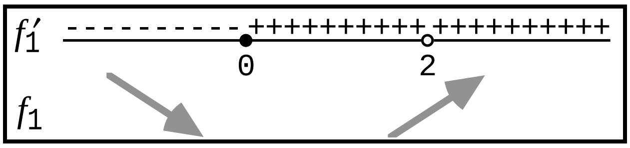
Studiamo il segno di $f_1'(x)$ nei due casi.

In entrambi i casi il denominatore è sempre positivo, quindi non occorre tenerne conto.

Se $x > 2$ risulta $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$; quest'ultima disuguaglianza è verificata se $x < 0$ oppure $x > 2$; quindi $f_1'(x) > 0 \ \forall\, x > 2$.

Se $x < 2$ è $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - x^2 > 0$; questa disuguaglianza è verificata quando $0 < x < 6$; tenendo conto della condizione $x < 2$, avremo $0 < x < 2$.

Nel seguente schema è riportato il segno della derivata, con le sue conseguenze sulla monotonia della funzione.



Il punto $(0,0)$ è un punto di minimo relativo (ed assoluto) per $f_1(x)$.
In $x=2$, come abbiamo già rilevato nel caso generale, la funzione non è derivabile, in quanto si ha:

$$\lim_{x\to 2^-} f_1'(x)=8 \qquad \lim_{x\to 2^+} f_1'(x)=0$$

e quindi il punto $A(2,4)$ è un punto angoloso per il grafico C_1. Le equazioni delle due tangenti in A sono, a sinistra, $y=8x-12$ e, a destra, $y=4$ (cfr.5.20).
La funzione è continua in tutti i punti del dominio, compreso $x=2$; poiché essa è crescente sia a sinistra sia a destra di 2, f_1 è crescente in $\left]0,+\infty\right[$

Derivata seconda, concavità della funzione ed eventuali punti di flesso: procedendo come nel caso della derivata prima si ottiene:

$$f_1''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{se} \quad x>2\\[2ex] \dfrac{18}{(3-x)^3} & \text{se} \quad x<2\end{cases}$$

La derivata seconda della funzione è quindi positiva per ogni $x\neq 2$.
Poiché f_1 non è derivabile per $x=2$, <u>non è corretto</u> affermare che «f_1 è convessa in $\left]-\infty,+\infty\right[$»; è vero invece che f_1 è convessa in $\left]-\infty,2\right[$ ed in $\left]2,+\infty\right[$
Il grafico della funzione è rappresentato in figura 1, nella quale viene anche messa in evidenza la regione piana della quale successivamente calcoleremo l'area.

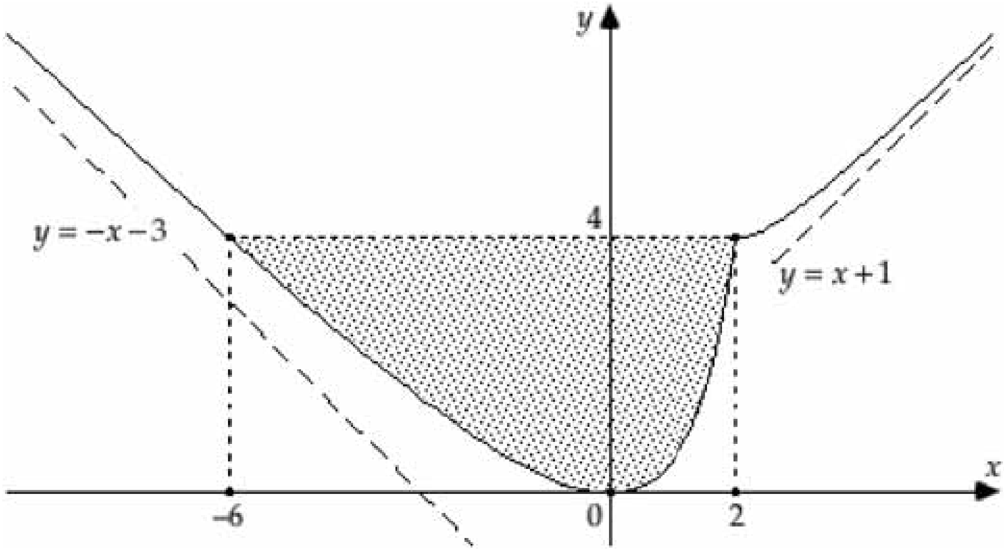


figura 1

Domanda *c*): area della parte di piano.

Come risulta dalla figura 1, il grafico del funzione interseca la retta $y=4$ in un altro punto B oltre ad A; poiché B si trova nella regione in cui è $x<2$, le sue coordinate si possono ottenere risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{3-x} \\ y=4 \end{cases}$$

il quale conduce all'equazione

$$x^2+4x-12=0$$

le cui soluzioni sono: $x=-6$, $x=2$; le coordinate del punto B sono pertanto $B(-6,4)$. L'area richiesta, evidenziata nella figura 1, si ottiene calcolando (cfr.5.30):

$$\int_{-6}^{2}\left(4-\frac{x^2}{3-x}\right)dx$$

Poiché nell'espressione $-\frac{x^2}{3-x}$ il grado del numeratore supera quello del denominatore, per calcolare l'integrale occorre eseguire la divisione:

$$
\begin{array}{rrr|l}
-x^2 & & & -x+3 \\ \cline{4-4}
x^2 & -3x & & x+3 \\ \cline{1-3}
& -3x & & \\
& 3x & -9 & \\ \cline{2-3}
& & -9 &
\end{array}
$$

si può quindi scrivere: $\dfrac{-x^2}{3-x} = x+3-\dfrac{9}{3-x}$; l'integrale da calcolare è

$$
\int_{-6}^{2}\left(4+x+3-\frac{9}{3-x}\right)dx = \left[7x+\frac{x^2}{2}+9\ln|3-x|\right]_{-6}^{2} =
$$

$$
= 14+2+42-18-9\ln 9 = 40-9\ln 9
$$

$$
\boxed{\text{Area richiesta} = 40-9\ln 9}
$$

Soluzione del problema 2.

Cominciamo col calcolare i lati del triangolo ABC (figura 2); posto $\overline{BC}=x$ si ha, tenendo conto dei dati del problema

$$
\overline{AB} = \frac{3}{5}x,
$$

$$
\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}
$$

$$
= \sqrt{x^2-\frac{9}{25}x^2} = \frac{4}{5}x\,.
$$

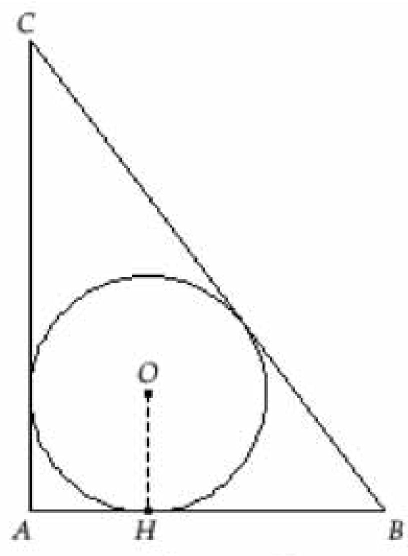


figura 2

Imponendo che l'area del triangolo sia $24a^2$ otteniamo:

$$
\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}x\cdot\frac{4}{5}x = \frac{6}{25}x^2
$$

quindi $\dfrac{6}{25}x^2 = 24^2$ e infine $x=10a$.

In conclusione

$$
\boxed{\overline{BC}=10a,\quad \overline{AB}=6a,\quad \overline{AC}=8a.}
$$

Domanda *a*): calcolo dell'altezza della piramide.

La piramide $VABC$ è retta, il che significa che la sua altezza VO cade nel centro del cerchio inscritto nella base ABC (figura 3).

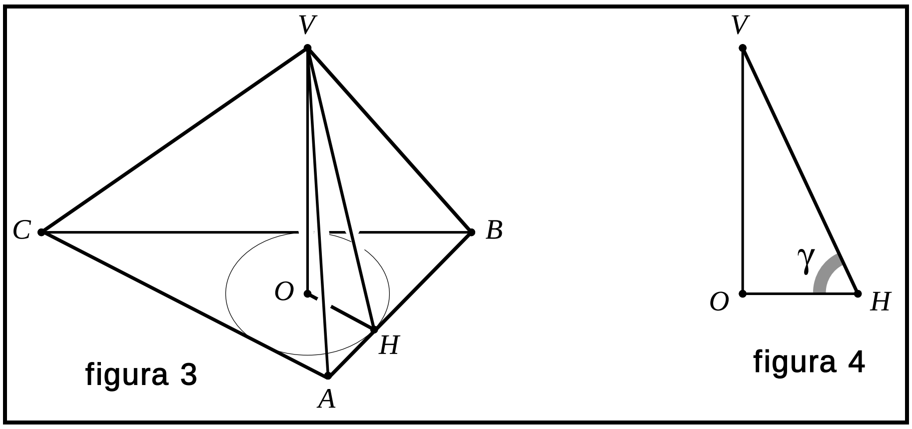


figura 3 figura 4

L'angolo γche il piano della faccia *VAB* della piramide forma col pano di base è la sezione normale del diedro di spigolo *AB*; per il teorema delle tre perpendicolari (cfr.2.31) il piano perpendicolare ad *AB* passante per *V* è quello passante per *V* , *O* e *H*.

Consideriamo quindi il triangolo *VOH* (figura 4) nel quale è noto l'angolo $V\hat{H}O = \gamma = \text{arcsen}\,\frac{12}{13}$.

OH è il raggio del cerchio inscritto nel triangolo *ABC*, quindi (cfr.2.30)

$$\overline{OH} = \frac{2 \cdot 24a^2}{10a + 8a + 6a} = 2a\,.$$

Per i teoremi sui triangoli rettangoli (cfr.4.46) si ha poi:

$$\overline{VH} = \overline{OH} \cdot \text{tg}\,\gamma = 2a \cdot \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}} = 2a \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\,a$$

calcolo nel quale si è tenuto conto della relazione fondamentale della trigonometria per calcolare il coseno di γ.

$$\boxed{\overline{VH} = \frac{24}{5}\,a}$$

Domanda *b*): calcolo della distanza di *C* dal piano *VAB*.

Poiché nel caso attuale la piramide *VABC* è un tetraedro, essa può essere riguardata come una piramide a base triangolare avente per base una qualsiasi delle sue facce. La distanza di *C* dal piano *VAB* è l'altezza della piramide di base *VAB*. Calcoliamo dunque il volume della piramide considerando *ABC* come base (cfr. 2.46):

$$Volume = \frac{1}{3} \cdot 24a^2 \cdot \frac{24}{5}\,a = \frac{192}{5}\,a^3\,.$$

Calcoliamo l'area di *VAB* trovando dapprima la sua altezza $\overline{VH}$:

$$\overline{VH} = \frac{\overline{VO}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{26}{5}a \quad \text{(cfr.4.44)}$$

quindi $Area(VAB) = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{VH} = \frac{78}{5}a$; infine, ricordando la formula per il calcolo del volume della piramide (cfr. 2.46) e indicando con K il piede della perpendicolare condotta da C al piano ABV:

$$\overline{CK} = \frac{3\cdot Vol(ABCV)}{Area(ABV)} = \frac{96}{13}a.$$

$$\boxed{\text{distanza di } C \text{ al piano } ABV\text{: } \frac{96}{13}a}$$

Domanda *c*): prisma di volume massimo.

Indichiamo con x l'altezza del prisma, ovvero la distanza del piano α dal piano ABC (figura 5), ovvero la lunghezza di RO; se indichiamo con R l'intersezione di α con la altezza VO del prisma, sarà $\overline{RO} = x$.

Avremo allora

$$\overline{VR} = \frac{24}{5}a - x.$$

Il triangolo ABC ed il triangolo $A'B'C'$ sono simili ed il rapporto di similitudine è

$$\frac{\overline{VR}}{\overline{VO}} = \frac{5}{24a}\left(\frac{24}{5}a - x\right).$$

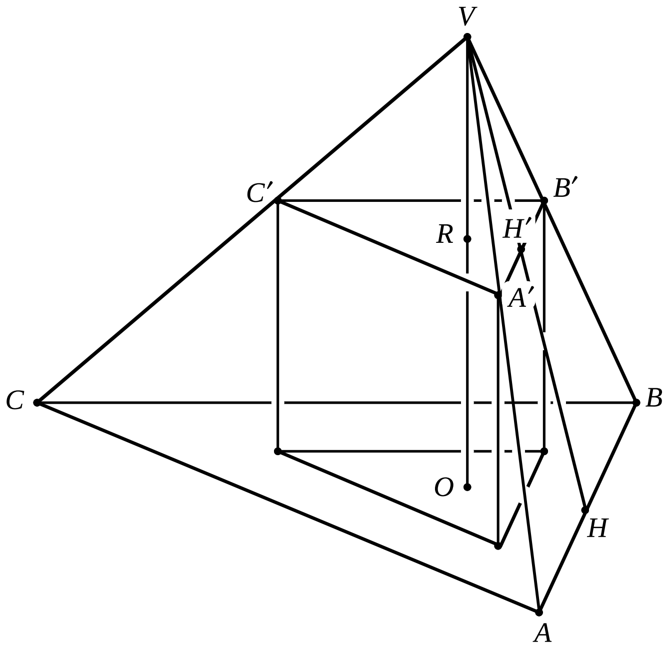


figura 5

Questa affermazione è un'applicazione diretta di un Teorema di geometria dello spazio relativo alle sezioni di un angoloide, che ricordiamo:

Le sezioni di un angoloide con due piani paralleli non passanti per il vertice dell'angoloide sono due poligoni simili, il cui rapporto di similitudine è il rapporto fra le distanze dei due piani dal vertice

Il rapporto tra le aree dei due triangoli (cfr.2.6) è allora

$$\frac{Area(A'B'C')}{Area(ABC)} = \left(\frac{5}{24a}\left(\frac{24}{5}a - x\right)\right)^2$$

e quindi, ricordando che per ipotesi $Area(ABC) = 24a^2$ si ha

$$Area(A'B'C') = \frac{25}{24}\left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 .$$

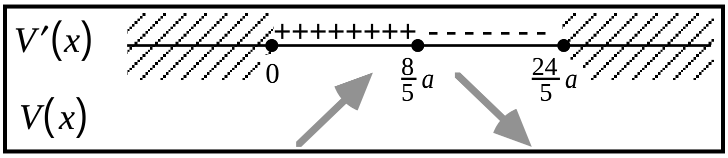
Il volume del prisma è (cfr.2.34):

(1) $$V(x) = \frac{25x}{24}\left(\frac{24}{5}a - x\right)^2$$

con le limitazioni: $0 \le x \le \frac{24}{5}a$. Per calcolare il prisma di volume massimo calcoliamo la derivata di (1) :

$$V'(x) = \frac{25}{24}\left[\left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 - 2x\left(\frac{24}{5}a - x\right)\right] = \frac{25}{24}\left(\frac{24}{5}a - x\right)\cdot\left(\frac{24}{5}a - 3x\right).$$

Questa è positiva per $x < \frac{8}{5}a$ oppure $x > \frac{24}{5}a$; nello schema seguente è rappresentato il segno di $V'(x)$ e la monotonia di V, limitatamente all'intervallo $\left[0, \frac{24}{5}a\right]$. Si osserva che il prisma di volume massimo è quello avente altezza $x = \frac{8}{5}a$, prisma il cui volume è $V\left(\frac{8}{5}a\right) = \frac{16}{3}a^3$.



Altezza del prisma di volume massimo: $\frac{8}{5}a$

Domanda *d*): Prisma di massima area totale.

Ritorniamo al prisma di figura 5, avente altezza x e per base il triangolo $A'B'C'$. L'area laterale di un prisma si calcola con la formula (cfr.2.32):

$$Area\ laterale = perimetro\ di\ base \times altezza$$

l perimetro del triangolo $A'B'C'$ si ottiene ancora tenendo conto della similitudine tra i triangoli e del fatto che il perimetro di ABC

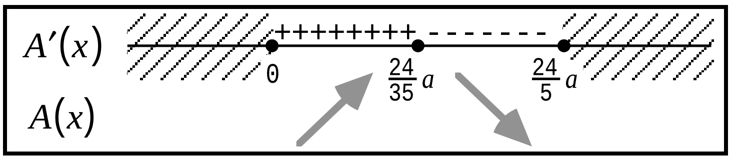
misura $24a$; si ha (cfr.2.5): $2p(A'B'C') = 5 \cdot \left(\frac{24}{5} a - x \right)$. Allora l'area laterale del prisma è $5x \cdot \left(\frac{24}{5} a - x \right)$ e l'area totale, che dobbiamo rendere massima è:

$$A(x) = 5x \cdot \left(\frac{24}{5} a - x \right) + 2 \cdot \frac{25}{24} \left(\frac{24}{5} a - x \right)^2 = \frac{48ax - 35x^2 + 576a^2}{12}.$$

Calcoliamo la derivata:

$$A'(x) = \frac{1}{12}(48a - 70x)$$

positiva per $x \le \frac{24}{35} a$. Il seguente schema rappresenta il segno di $A'(x)$ nell'intervallo $\left[0, \frac{24}{5} a\right]$, e le conseguenze sulla monotonia di $A(x)$ in questo intervallo:



Pertanto, il prisma con la massima area totale è quello di altezza $x = \frac{24}{35} a$ di area totale pari a $\frac{1728}{35} a^2$.

Si tratta di un prisma diverso da quello di volume massimo, conclusione che fornisce risposta negativa alla domanda *d*).

Questionario

Quesito 1

Si richiede di verificare la verità o falsità di due affermazioni riguardanti la continuità e derivabilità di una funzione in un punto. Si tratta di questioni elementari, trattate in ogni manuale di Analisi Matematica

A. La proposizione è <u>falsa</u>. La continuità di f in a è condizione *sufficiente* affinché f sia definita in a, ma non necessaria. Infatti la definizione di continuità di f in a è:

$$a \in D(f) \;\; ; \quad \textit{esiste} \lim_{x \to a} f(x) \;\; ; \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \;;$$

vi è quindi l'esplicita richiesta che $a \in D(f)$, ovvero che f sia definita in a.

Viceversa, la continuità di f in a *non è necessaria* affinché sia $a \in D(f)$: qualsiasi funzione discontinua in un punto a del suo dominio fornisce un controesempio in tale senso.

B. Pure questa proposizione è <u>falsa</u>. Infatti la derivabilità di f in a è condizione *sufficiente* affinché f sia continua in a (si tratta di un noto Teorema, esposto in tutti i testi di Analisi Matematica); tale condizione però *non è necessaria* per la continuità di f in a. Ci sono infatti funzioni continue ma non derivabili in certi punti del loro dominio; l'esempio più semplice a questo proposito è la funzione $f(x) = |x|$; essa è continua in tutto **R**, ma non è derivabile in $a = 0$.

La combinazione esatta di risposte al quesito è dunque la ***d*)**.

Quesito 2

Il quesito è molto simile nella struttura al Quesito 3 proposto nella Sessione Ordinaria 2001: come in quel caso, è sufficiente ragionare sul quadrato ABCD, ragionando cioè su di una figura piana.

Poiché i due piani con i quali viene sezionato il cubo sono perpendicolari alla faccia *ABCD*, le "parti" in cui essi dividono il cubo sono <u>prismi retti</u>; per ciascuno di questi prismi, l'altezza è uguale allo spigolo ℓ del cubo; perciò i volumi sono proporzionali alle rispettive aree di base.

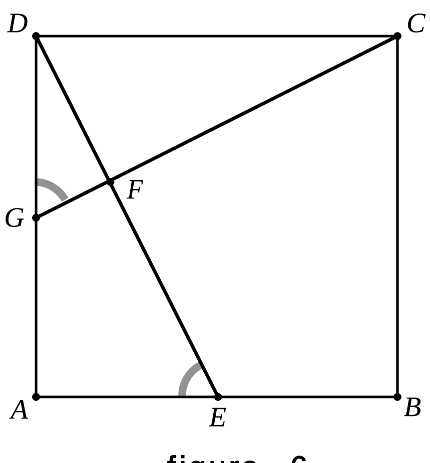


figura 6

Calcoleremo quindi a quale frazione del quadrato *ABCD* equivale ciascuno dei quattro quadrilateri nei quali le rette *DE* e *CF* dividono il quadrato (figura 6).

Sia G il punto in cui la retta DE interseca il lato AD. Poiché $CG \perp DE$ e $AB \perp AD$, si ha che $C\hat{G}D = D\hat{E}A$. Perciò i triangoli rettangoli CGD e DEA sono congruenti, per il secondo criterio, essendo anche $\overline{CD} = \overline{AD}$.
In particolare $\overline{GD} = \overline{AE} = \frac{1}{2}\ell$, cosicché G <u>è il punto medio di</u> AD.
L'area dei triangoli rettangoli CGD e ADE è:

(1) $$Area\,CGD \;=\; Area\,ADE \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ell\cdot\ell \;=\; \frac{1}{4}\ell^2.$$

I triangoli rettangoli GFD, DFC sono simili a ADE. Per calcolare le loro aree basta ora determinare il rapporto di similitudine con ADE.

Per il Teorema di Pitagora l'ipotenusa *DE* misura:

(2) $$\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{\ell^2 + \frac{1}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\ell .$$

Il lato *DC*, che ora guardiamo come ipotenusa di *DFC*, misura ℓ; quindi il rapporto di similitudine tra *ADE* e *DFC* è $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Il rapporto fra le aree è il quadrato del rapporto di similitudine (cfr.2.6); perciò, tenendo conto di (1),

(3) $$\frac{1}{4}\ell^2 = Area\ ADE = \frac{5}{4} Area\ DFC\,; \qquad Area\ DFC = \frac{1}{5}\ell^2 .$$

Con analogo ragionamento, poiché $\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{DC}$, il rapporto di similitudine fra *GFD* e *DFC* è $\frac{1}{2}$; il rapporto fra le rispettive aree è quindi $\frac{1}{4}$. Tenendo conto di (3) si ha

(4) $$Area\ GFD = \frac{1}{20}\ell^2 .$$

(Ancora più semplicemente, avremmo potuto osservare subito che il rapporto fra le aree di *GFD* e *DFC* è $\frac{1}{4}$; quindi tali aree dividono $\frac{1}{4}\ell^2$, area di *DFC*, in parti proporzionali a 1 e 4: avremmo ottenuto i risultati di (3) e (4) senza la necessità di calcolare la misura di *DE*).

Le aree dei due quadrilateri *AEFG* e *EBCF* si calcolano facilmente come differenza:

$$Area\ AEFG = Area\ ADE - Area\ GFD = \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{20}\ell^2 = \frac{1}{5}\ell^2\ ;$$

$$Area\ EBCF = Area\ EBCD - Area\ DFC = \frac{3}{4}\ell^2 - \frac{1}{5}\ell^2 = \frac{11}{20}\ell^2 .$$

Le frazioni del quadrato alle quali equivalgono le quattro figure considerate sono quindi, nell'ordine:

$$\frac{1}{5}\ ,\quad \frac{1}{20}\ ,\quad \frac{1}{5}\ ,\quad \frac{11}{20} .$$

Per quanto detto all'inizio, queste sono pure le frazioni del cubo alle quali equivale ciascuno dei prismi descritti nel testo.

Quesito 3

Nella formulazione del quesito compaiono i coefficienti binomiali; si tratta però di una questione affrontabile solo se si conosce la formula del binomio di Newton che permette di esprimere semplicemente la somma dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ *con* k *che varia da 0 a* n.

Per la formula del binomio di Newton (cfr.1.24) si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n .$$

Posto $a = b = 1$ la formula diventa: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

La condizione data dal testo: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576$ equivale quindi a cercare soluzioni dell'equazione

$$2^n = 1048576 .$$

L'eventuale soluzione (che deve essere un numero intero) può essere cercata per tentativi, valutando le successive potenze di 2. Poiché risulta $1048576 = 2^{20}$, la soluzione cercata è $n = 20$.
Il valore di n si poteva anche determinare direttamente mediante una calcolatrice "scientifica". Se nell'equazione $2^n = 1048576$ applichiamo ad ambo i membri il logaritmo naturale otteniamo: $n \cdot \ln 2 = \ln(1048576)$ da cui $n = \dfrac{\ln(1048576)}{\ln 2} = 20$.

Quesito 4

Il quesito, assai simile al Quesito 2 proposto nella Sessione Ordinaria 2001, si risolve applicando per due volte il Teorema di de l'Hôpital combinato con il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Rimandiamo alla risoluzione di detto quesito (primo metodo) per maggiori dettagli.

Poiché risulta $\lim_{x \to 0} \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$, sia il numeratore sia il denominatore della frazione in oggetto hanno limite 0. Possiamo perciò cercare di calcolare il limite richiesto applicando il Teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\, dt - x}{\cos(2x) - 1} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{-2\,\mathrm{sen}(2x)}$$

Il denominatore ha limite 0 per $x \to 0$, ed anche il numeratore; infatti f è continua, essendo per ipotesi derivabile; inoltre, sempre per ipotesi è $f(0) = 1$; quindi $\lim_{x \to 0} (f(x) - 1) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$.

Possiamo quindi applicare un'altra volta il Teorema di de l'Hôpital ottenendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{-2\,\mathrm{sen}(2x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{-4\cos(2x)} = \frac{f'(0)}{-4\cos(0)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

tenendo presente che per ipotesi f' è continua e $f'(0) = 2$.

È possibile anche una risoluzione basata sull'applicazione del Teorema della Media integrale, del tipo del "secondo metodo" proposto per il Quesito 2 della Sessione Ordinaria 2001; ma in questo caso risulterebbe più complicata ed artificiosa, e quindi preferiamo tralasciarla.

Quesito 5

È richiesto il calcolo della derivata di una funzione mediante la definizione. È necessario conoscere il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$.

Per definizione, la derivata di una funzione f in un punto x del suo dominio è il

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se questo esiste ed è finito.

Nel nostro caso la funzione in oggetto è $f(x) = a^x$, pertanto dobbiamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.$$

Si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

Quesito 6

È un problema di massimo. Esponiamo sia la risoluzione "tradizionale" con l'ausilio del calcolo differenziale, sia una semplice soluzione sintetica, basata sul secondo teorema di Euclide.

Soluzione mediante il calcolo differenziale.

Sia $2p$ il perimetro assegnato; x e $p - x$ le dimensioni del rettangolo $(0 \le x \le p)$ (figura 7). L'area di detto rettangolo è allora espressa da

$$A(x) = x(p - x) = px - x^2$$

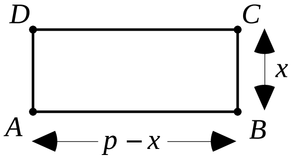
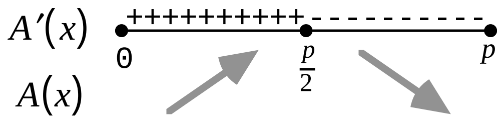


figura 7

Risulta $A(0) = A(p) = 0$; $A'(x) = p - 2x$, il cui segno varia nell'intervallo $[0, p]$ come indica-to nel seguente schema, con le conseguenze ivi riportate sulla monotonia di $A(x)$:



Il massimo di $A(x)$ è raggiunto quando $x = \frac{p}{2}$, vale a dire quando il rettangolo diventa un quadrato di lato $\frac{p}{2}$.

Soluzione sintetica.

Prolunghiamo il lato DC oltre C di un segmento $CE = CB$; costruiamo la semicirconferenza di diametro DE; conduciamo da C la retta perpendicolare al diametro, che interseca in F la semicirconferenza (figura 8). Osserviamo che il punto E non cambia al variare del rettangolo, perché si ha sempre $\overline{DE} = p - x + x = p$.

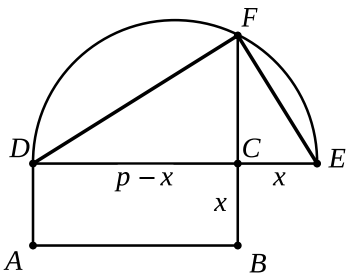


figura 8

Il triangolo DEF è rettangolo in F perché inscritto in una semicirconferenza. Per il secondo Teorema di Euclide è

(1) $$\overline{DC} \cdot \overline{CE} = \overline{CF}^2$$

Il primo membro di (1) è l'area di $ABCD$, in quanto per costruzione $\overline{BC} = \overline{CE}$; grazie all'uguaglianza (1), il problema consiste nello stabilire quando risulta massimo $\overline{CF}^2$.

Evidentemente ciò si verifica quando C è il punto medio di DE, cioè quando il rettangolo $ABCD$ è un quadrato di lato $\frac{p}{2}$, come avevamo già ottenuto in precedenza.

Quesito 7

È un quesito di analisi matematica riguardante la formula di sostituzione per gli integrali e il teorema di Torricelli .

Innanzi tutto, applicando la formula di sostituzione (cfr.5.28) e ponendo $\frac{x}{2} = t$ si ottiene $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$. Il testo afferma che una primitiva di $f(x)$ è $x^2 + 2x$, quindi, per il teorema di Torricelli:

$$2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt = 2 \cdot \left[t^2 + 2t\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{2}.$$

Quesito 8

Si deve dimostrare la formula che esprime il volume di un solido di rotazione. È necessaria una ottima conoscenza della definizione di integrale; il quesito risulta alquanto impegnativo, sicuramente più di tutti gli altri proposti in questa prova.

Scomponiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito n di intervallini, mediante $n+1$ punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. L'insieme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ costituisce una *scomposizione* di $[a, b]$ (nella figura 9 è $n = 3$).

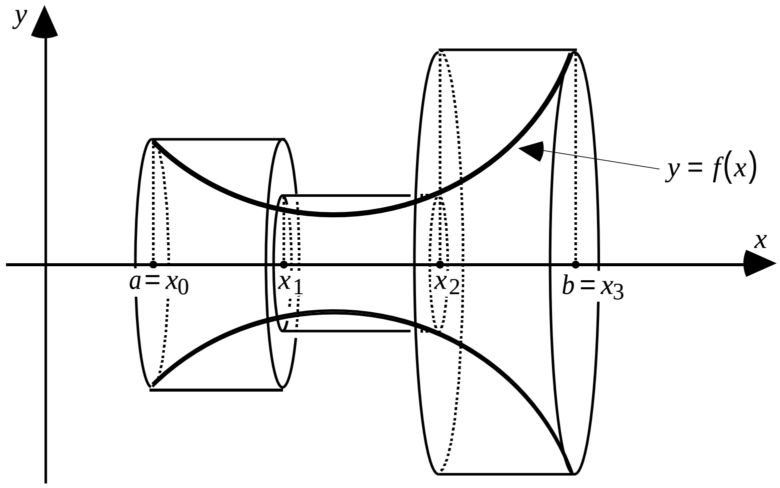


figura 9

Supponiamo per semplicità $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [a, b]$. In ciascuno degli intervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... consideriamo il <u>massimo valore</u> assunto da f:

$$M_k = \max\{f(x)\,;\; x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

(M_k esiste in virtù del Teorema di Weierstrass, perché f è per ipotesi continua).

Ciascun cilindro circolare avente per asse il segmento $[x_{k-1}, x_k]$ dell'asse delle ascisse, e M_k come raggio di base è <u>circoscritto</u> alla porzione di solido di rotazione di f corrispondente a tale intervallo. L'unione degli n cilindri costituisce un "pluricilindro" circoscritto al solido di rotazione. Il volume V di quest'ultimo è pertanto <u>minore o uguale</u> al volume del pluricilindro, esprimibile come somma dei volumi dei cilindri componenti:

(1) $$V \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\pi M_k^2}_{\substack{\text{area di base del} \\ k\text{–esimo cilindro}}} \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\substack{\text{altezza del} \\ k\text{–esimo cilindro}}}$$

Analogamente, prendendo come raggi di base i <u>minimi valori</u> assunti da f negli intervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ...

$$m_k \;=\; \min\left\{ f(x)\,;\; x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$

avremo un "pluricilindro" inscritto nel solido di rotazione, ed una approssimazione per difetto del volume V di quest'ultimo

(2) $$V \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} \pi\, m_k^2 \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Poiché è

$$\pi\, m_k^2 = \min\left\{ \pi [f(x)]^2 ; x \in [x_{k-1}, x_k] \right\} ; \quad \pi\, M_k^2 = \max\left\{ \pi [f(x)]^2 ; x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}$$

i secondi membri di (1) e (2) sono rispettivamente la <u>somma superiore</u> e la <u>somma inferiore</u> relative alla funzione $\pi [f(x)]^2$ e alla scomposizione σ dell'intervallo $[a, b]$, cosicché per definizione di integrale è

$$\lim_{\delta(\sigma)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi\, m_k^2 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \lim_{\delta(\sigma)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi\, M_k^2 \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

($\delta(\sigma)$ indica la <u>massima lunghezza</u> degli intervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … determinati dalla scomposizione σ dell'intervallo $[a, b]$).
Da (1) e (2) segue allora

$$V \;=\; \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

che è la formula che dovevamo dimostrare.

Quesito 9

Anche questo quesito richiede il calcolo della derivata di una funzione mediante la definizione. È necessario conoscere il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

Per definizione, la derivata di una funzione f in un punto x del suo dominio è il

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se questo esiste ed è finito.
Nel nostro caso la funzione in oggetto è $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, pertanto dobbiamo calcolare il

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x + 2h) - \operatorname{sen}(2x)}{h}.$$

Applichiamo la formula di prostaferesi per la differenza di due seni (cfr.4.31); risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\,\text{sen}(h)\cdot\cos(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2\,\frac{\text{sen}(h)}{h}\cdot\cos(2x+h) = 2\cos 2x$$

tenendo presente che $\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$.

Quesito 10

Si tratta di una questione teorica di Analisi Matematica, riguardante la relazione fra punti i flesso per una funzione e punti in cui la derivata seconda è nulla. La trattazione del quesito risulta più semplice se si suppone f'' continua in a. Osserviamo che a deve essere supposto interno al dominio di f, altrimenti la nozione di "punto di flesso" non ha senso.

Ricordiamo la definizione di punto di flesso:

Se f è una funzione derivabile in un intervallo I, e a è un punto interno ad I, si dice che a è un punto di flesso per f se esiste $\delta > 0$ tale che f risulti convessa [rispettivamente: concava] in $]a-\delta, a[$ e concava [rispettivamente: convessa] in $]a, a+\delta[$ (figura 10).

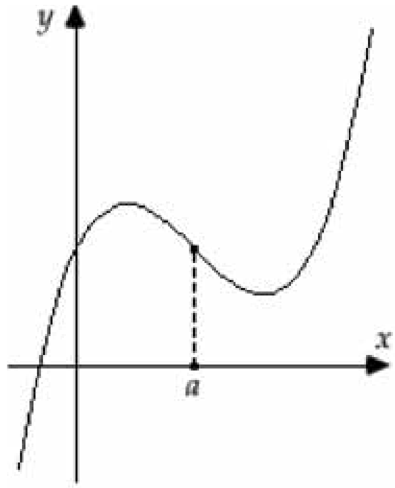


figura 10

Si vede facilmente che la condizione $f''(a) = 0$ non è sufficiente affinché a sia punto di flesso per f. Può accadere infatti che sia $f''(a) = 0$, ma a non sia punto di flesso.

Per esempio, sia $f(x) = x^4$ (figura 11); risulta $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$ e quindi $f''(0) = 0$; tuttavia 0 non è punto di flesso per f. Infatti, per un noto Teorema, se f è derivabile almeno due volte, f è convessa [risp.: concava] in un intervallo J se e solo se $f''(x) \geq 0$ [risp.: $f''(x) \leq 0$] $\forall\, x \in J$. Poiché $f''(x) = 12x^2$ è sempre ≥ 0, f è convessa in **R**, e non c'è alcun punto di flesso.

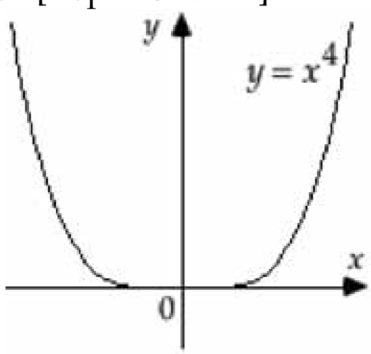


figura 11

Dimostriamo ora che la condizione $f''(a) = 0$ è necessaria affinché a sia punto di flesso per f, cioè (nell'ipotesi di f derivabile due volte):

Se a è punto di flesso per f, allora

$$f''(a) = 0.$$

Supponiamo dapprima f'' continua in a.
Sia, per esempio f concava in $]a-\delta\,, a[$ e convessa in $]a, a+\delta[$ (è la situazione illustrata nella figura 10). Per il Teorema ricordato in precedenza, si avrà $f''(x) \le 0$ in $]a-\delta\,, a[$, $f''(x) \ge 0$ in $]a-\delta\,, a[$. Se f'' è continua, da ciò segue $f''(a) = 0$, e ciò completa la dimostrazione.

Se non si suppone f'' continua, l'affermazione vale ugualmente, ma la dimostrazione è leggermente diversa:
se f è concava in $]a-\delta\,, a[$ e convessa in $]a, a+\delta[$, avremo come prima $f''(x) \le 0$ in $]a-\delta\,, a[$, $f''(x) \ge 0$ in $]a-\delta\,, a[$; da ciò segue che f' è decrescente in $]a-\delta\,, a[$, crescente in $]a-\delta\,, a[$; inoltre f' è continua, essendo per ipotesi derivabile. Perciò a è punto di massimo relativo per f'. Per il Teorema di Fermat, la derivata di f' vale zero in a, cioè $f''(a) = 0$, come si voleva dimostrare.

Concludiamo quindi che la risposta esatta è la *b*) (la condizione è necessaria ma non sufficiente).