Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2000-2001
P.N.I.
Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio.
Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

***a*)** si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

***b*)** si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

***c*)** posto X, appartenente a γ, in uno dei semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \left(\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2$ e $x = \operatorname{tg}\alpha$.

Problema 2.

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a\ln(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = \left| x^2 + a\ln(x + b) \right|.$$

Questionario.

1. Provare che una sfera è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

4. Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x .$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

5. Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \; dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: quale è la probabilità che essi siano tutti maschi?

9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 Km / h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 Km / h».

Leggiamolo insieme

Problema 1

È un problema sui luoghi geometrici La risoluzione suggerita dal testo utilizza gli strumenti della geometria analitica; alcune conoscenze di geometria sintetica possono essere utili per ottenere l'equazione del luogo γ (domanda ***b*)**) con calcoli più semplici.
L'ultima parte del problema (domanda ***c*)**) conduce allo studio di una funzione razionale fratta; la questione può essere affrontata sia con metodi analitici, sia con tecniche di trigonometria.

Che cosa ripassare?

I luoghi geometrici, e in particolare la circonferenza; il significato trigonometrico del coefficiente angolare di una retta; il Teorema della corda; il Teorema di Carnot. Le proprietà delle funzioni razionali.

Problema 2

Si tratta di un problema di Analisi riguardante una funzione logaritmica, contenente due parametri da determinare in base a certe condizioni assegnate.
La domanda ***c*)** richiede il calcolo approssimato dell'ascissa positiva di intersezione del grafico con l'asse delle ascisse; tale ascissa non può essere calcolata in modo esatto con metodi algebrici.
Le ultime due domande richiedono in sostanza di applicare semplici simmetrie assiali al grafico della funzione.

Che cosa ripassare?

Il Teorema di Fermat sugli estremanti; le proprietà delle funzioni logaritmiche; i metodi numerici per il calcolo approssimato della soluzione di un'equazione; le simmetrie assiali; lo studio di funzioni contenenti valori assoluti.

Soluzione del problema 1

domanda *a*): soluzione sintetica.

È immediato rispondere alla domanda riguardante il valore di k per il quale il luogo indicato è una retta: si tratta evidentemente di $k=1$. Infatti per questo valore di k la relazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$ equivale a $\overline{PA}=\overline{PB}$. Il luogo dei punti P soddisfacenti questa condizione è l'<u>asse</u> del segmento *AB*, cioè la retta perpendicolare ad *AB* passante per il punto medio di *AB*.
Supponiamo ora $k>0$, $k\neq 1$.

Ci sono due punti sulla retta *AB* soddisfacenti la relazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$, uno interno al segmento *AB* (lo chiamiamo *M*), ed uno esterno (lo chiamiamo *N*). *N* si trova oltre *B* se $k>1$ (come nella figura 1, in cui è $k=2$); si trova prima di *A* se $0<k<1$. Non ci sono comunque differenze di trattazione relativamente a questi due casi.

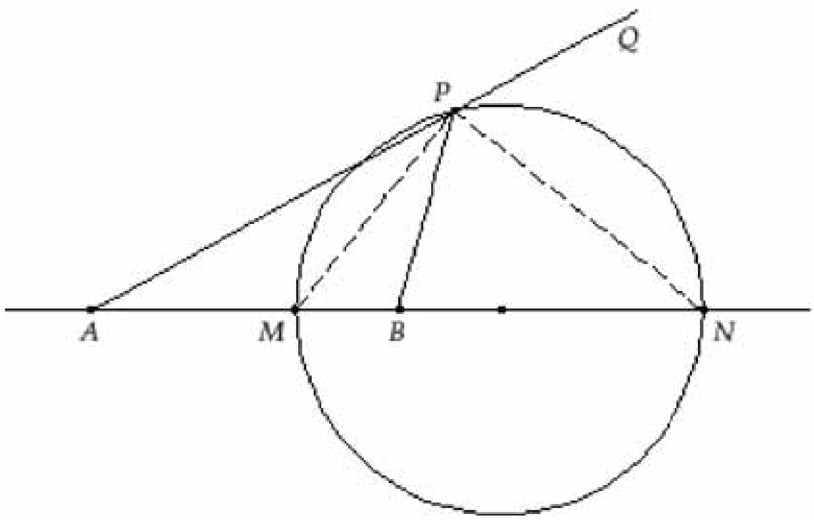


figura 1

Sia P un punto esterno alla retta *AB*. Vogliamo dimostrare che

la relazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$ *è verificata se e solo se*
P appartiene alla circonferenza di diametro MN.

Dimostriamo separatamente le due implicazioni.

I. Supponiamo $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=k$. Proviamo che P appartiene alla circonferenza di diametro *MN* mostrando che l'angolo $M\hat{P}N$ è retto.

Per costruzione è $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ $(= k)$. Per il Teorema (inverso) della bisettrice applicato al triangolo ABP risulta allora che PM è la bisettrice di $A\hat{P}B$.

Ancora per costruzione è $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ $(= k)$. Per il Teorema (inverso) della bisettrice esterna segue che PN è la bisettrice dell'angolo esterno $Q\hat{P}B$ del triangolo APB.

Essendo bisettrici di due angoli adiacenti, PM e PN sono perpendicolari, come volevamo dimostrare.

II. (viceversa): Sia P un punto della circonferenza di diametro MN. Mostriamo che $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$. Sia R l'ulteriore punto in cui la retta AP interseca la circonferenza (figura 2)

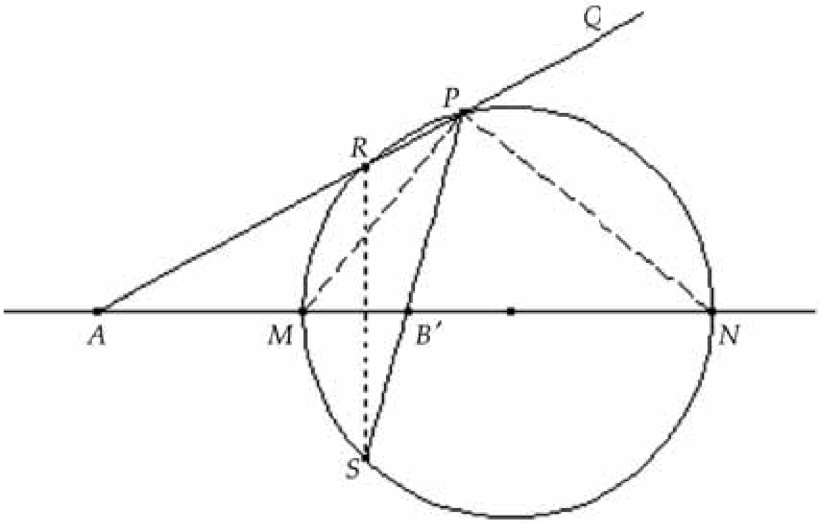


figura 2

Sia S il punto della circonferenza tale che M risulti il punto medio dell'arco RS; sia B' il punto di intersezione della retta PS con il diametro MN.

Poiché gli archi RM e MS sono di uguale lunghezza, PM è la bisettrice dell'angolo $A\hat{P}B'$. Per il Teorema (diretto) della bisettrice risulta

$$(1) \qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB'}}.$$

Essendo $PN \perp PM$ e PM bisettrice di $A\hat{P}B'$, segue che PN è la bisettrice dell'angolo $B'\hat{P}Q$. Per il Teorema (diretto) della bisettrice esterna abbiamo allora

(2) $$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB'}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB'}}$$

Da (1) e (2) segue che

(3) $$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB'}}.$$

Ora, per costruzione è

(4) $$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\left(= k\right)$$

Ciò che dobbiamo fare adesso è provare che $B' \equiv B$. Questo si può realizzare come segue.

Nella (4) permutiamo i medi, e poi applichiamo la proprietà del comporre: otteniamo

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NB}} \quad ; \qquad \frac{\overline{MA}+\overline{NA}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MB}+\overline{NB}}{\overline{NB}}$$

cioè

(5) $$\frac{\overline{MA}+\overline{NA}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB}}.$$

Procedendo analogamente sulla proporzione (3) otteniamo

(6) $$\frac{\overline{MA}+\overline{NA}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NB'}}.$$

Dal confronto fra (5) e (6) segue che $\overline{NB'} = \overline{NB}$ (per l'unicità del quarto proporzionale) , e quindi $B' \equiv B$, come si voleva dimostrare.

domanda *a*): soluzione mediante la geometria analitica.

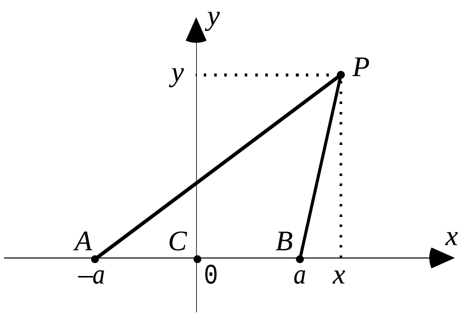


figura 3

Scegliamo il sistema di riferimento con l'origine nel punto medio C del segmento AB e l'asse delle ascisse sulla retta AB, orientato da C verso B. Si ha allora $A\left(-a,0\right)$, $B\left(a,0\right)$. Sia $P\left(x, y\right)$ un punto del piano, diverso da B. La relazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ si esprime nel modo seguente (cfr.3.1):

$$\frac{\sqrt{\left(x+a\right)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(x-a\right)^2 + y^2}} = k.$$

Poiché $k > 0$ è lecito elevare al quadrato entrambi i membri; calcoliamo poi il denominatore comune: otteniamo

$$(x+a)^2+y^2=k^2\left((x-a)^2+y^2\right);$$
$$\left(1-k^2\right)x^2+\left(1-k^2\right)y^2+2a\left(1+k^2\right)x+\left(1-k^2\right)a^2=0.$$

Se $k=1$ questa si riduce a $4ax=0$, cioè $x=0$, che è l'equazione dell'asse *y*, il quale è l'asse del segmento *AB*. Questo è il caso in cui il luogo degenera in una retta.
Se, invece, è $k\neq 1$ otteniamo

$$x^2+y^2+2a\frac{1+k^2}{1-k^2}x+a^2=0$$

che è l'equazione di una circonferenza con il centro nel punto $D\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2},0\right)$ e il raggio uguale a

$$\sqrt{a^2\left[\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2-1\right]}=a\sqrt{\frac{4k^2}{\left(1-k^2\right)^2}}=\frac{2ka}{\left|1-k^2\right|}$$

(cfr.3.20, 3.21).

domanda *b*).
Il luogo richiesto è l'unione dei due archi di circonferenza con base *AC*, capaci di un angolo di 45°, situati nei due semipiani aventi come origine la retta *AC* (figura 4).

La misura dell'angolo, 45°, permette di determinare il luogo sfruttando alcune considerazioni geometriche le quali rendono assai più semplice la risoluzione, rispetto ad una trattazione esclusivamente algebrica.
Per esempio si può osservare che nel semipiano $y\geq 0$ un punto del luogo è il punto *R*, terzo vertice di un triangolo rettangolo isoscele *ACR* con l'angolo retto in *C*.
È $R(0,a)$. L'arco da noi cercato fa parte della circonferenza passante per *A*, *C*, *R*, la quale ha *AR* come diametro: il centro è pertanto il punto medio $V\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ del segmento *AR*, ed il raggio è $\frac{1}{2}\overline{AR}=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. L'equazione di questa circonferenza è pertanto (cfr.3.22):

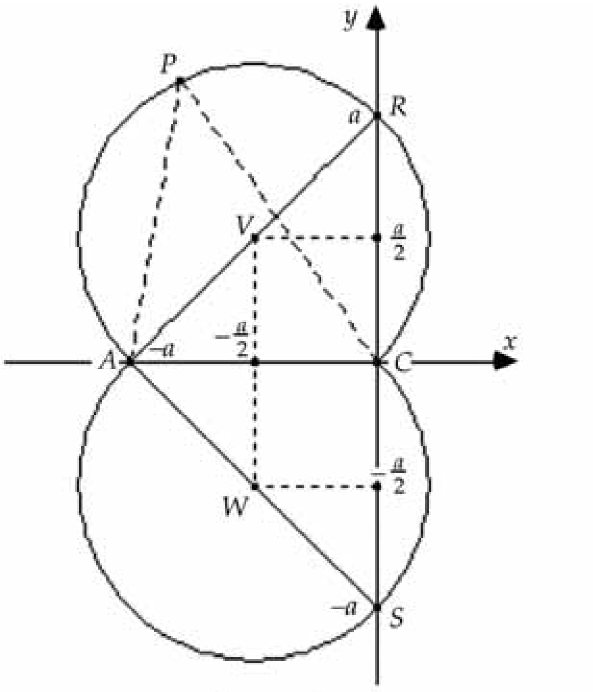


figura 4

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

cioè

(1) $x^2+y^2+a\,x-a\,y \;=\; 0.$

Una diversa via per determinare le coordinate di V è la seguente: L'angolo $A\hat{V}C$ è retto, perché doppio dell'angolo alla circonferenza $A\hat{P}C$, il quale misura per ipotesi $45°$. Dunque il triangolo AVC è isoscele e rettangolo in V e quindi, essendo $A(-a,0)$ si ha $V\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. Il raggio è $\overline{VC}=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Si ottiene nuovamente la circonferenza (1).

Fa parte del luogo da noi cercato l'arco di questa circonferenza situato nel semipiano $y\geq 0$.

L'arco situato nel semipiano $y\leq 0$ che completa il luogo fa parte della circonferenza simmetrica rispetto all'asse x di quella testé ottenuta. Questa si può determinare con ragionamenti analoghi ai precedenti, oppure più semplicemente tenendo conto nella simmetria: è sufficiente cambiare in (1) y con $-y$ (cfr.3.80); si ottiene

$$x^2+y^2+a\,x+a\,y \;=\; 0.$$

domanda *c*).

Ragioniamo sull'arco di γ situato nel semipiano superiore, arco rappresentato dall'equazione (1).

Non c'è un solo modo per determinare l'espressione di $f(x)$; qui ne esponiamo due: il primo basato su metodi di geometria analitica (il quale però dà luogo a calcoli piuttosto laboriosi), il secondo basato sulla trigonometria.

Primo metodo: con la geometria analitica.

Il valore di $x = \mathrm{tg}(X\hat{A}C)$ è il coefficiente angolare della retta AX; troveremo le coordinate di X in funzione $\mathrm{tg}(X\hat{A}C)$ risolvendo il sistema fra l'equazione della circonferenza e quello della retta per A avente quel coefficiente angolare.

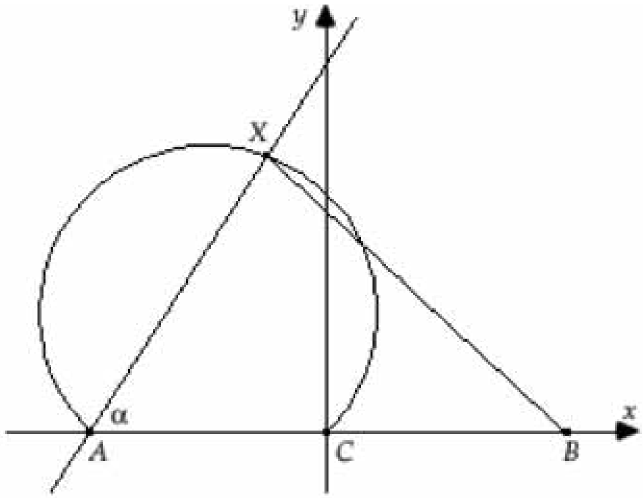


figura 5

Per non creare confusione dobbiamo provvisoriamente utilizzare un altro simbolo, diverso da x, per indicare $\mathrm{tg}(X\hat{A}C)$. Indichiamo perciò $\mathrm{tg}(X\hat{A}C) = m$; con (x, y) indicheremo invece le coordinate generiche nel piano.

Le coordinate di X in funzione di m si deducono dunque da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x - a\,y = 0 \quad (\textit{circonferenza}) \\ y = m(x+a) \quad (\textit{retta } AX) \end{cases} \tag{2}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione risolvente

$$x^2 + m^2\left(x^2 + 2a\,x + a^2\right) + a\,x - a\,m(x+a) \;=\; 0$$

ossia

$$x^2\left(1+m^2\right) + x\left(2a\,m^2 - a\,m + a\right) + a^2\left(m^2 - m\right) \;=\; 0 \tag{3}$$

Il discriminante dell'equazione (3) è

$$\Delta \;=\; \left(2a\,m^2 - a\,m + a\right)^2 - 4a^2\left(1+m^2\right)\left(m^2 - m\right) \;=$$

$$= a^2\left[4m^4+m^2+1-4m^3+4m^2-2m-4m^2+4m-4m^4+4m^3\right] =$$
$$= a^2\left[m^2+2m+1\right] = \left[a(m+1)\right]^2$$

cosicché le soluzioni di (3) sono:

$$(4)\qquad x = a\frac{-2m^2+m-1\pm(m+1)}{2\left(1+m^2\right)} = \begin{cases} a\dfrac{-2m^2-2}{2\left(1+m^2\right)} = -a \\ a\dfrac{-2m^2+2m}{2\left(1+m^2\right)} = a\dfrac{m-m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Sostituendo ora i valori trovati di x nell'equazione $y=m(x+a)$ (la seconda del sistema (2)) otteniamo i corrispondenti valori di y, e con essi le coordinate dei punti di intersezione fra circonferenza e retta, in funzione del valore di m.
Si trova, naturalmente, il punto $A(-a,0)$, ed inoltre il punto:

$$(5)\qquad X\left(\frac{m-m^2}{1+m^2}a\,,\frac{m+m^2}{1+m^2}a\right).$$

Pertanto

$$f(m) = \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{m-m^2}{1+m^2}a-a\right)^2+\left(\frac{m+m^2}{1+m^2}a\right)^2}{\left(\frac{m-m^2}{1+m^2}a+a\right)^2+\left(\frac{m+m^2}{1+m^2}a\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(m-1-2m^2\right)^2+\left(m+m^2\right)^2}{\left(m-m^2+1+m^2\right)^2+\left(m+m^2\right)^2} =$$
$$= \frac{4m^2+m^2+1-2m-4m^3+4m^2+m^2+2m^3+m^4}{(m+1)^2\left(1+m^2\right)} =$$
$$= \frac{5m^4-2m^3+6m^2-2m+1}{(m+1)^2\left(1+m^2\right)} = \frac{\left(5m^2-2m+1\right)\left(1+m^2\right)}{(m+1)^2\left(1+m^2\right)} = \frac{5m^2-2m+1}{(m+1)^2}.$$

La scomposizione in fattori del numeratore si può ottenere, per esempio, svolgendo la divisione del polinomio di quarto grado per $\left(1+m^2\right)$; riportiamo qui sotto tale calcolo:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5m^4 & -2m^3 & +6m^2 & -2m & +1 & m^2+1 \\
\cline{6-6}
-5m^4 & & -5m^2 & & & 5m^2-2m+1 \\
\cline{1-5}
 & -2m^3 & +\ m^2 & -2m & +1 & \\
 & 2m^3 & & +2m & & \\
\cline{2-5}
 & & +\ m^2 & & 1 & \\
 & & -\ m^2 & & +1 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

La funzione $f(m)=\frac{5m^2-2m+1}{(m+1)^2}$ ha come dominio naturale l'insieme di tutti i numeri reali, con esclusione di –1, ed in questo insieme la studieremo. È opportuno tuttavia osservare che il dominio va ristretto, se si vuole che la funzione abbia relazione con la questione geometrica. Infatti, se il punto X appartiene all'arco di γ da noi considerato, la retta AX deve avere coefficiente angolare positivo, oppure minore di –1: le rette passanti per A con coefficienti angolari compresi fra –1 e 0 intersecano l'arco soltanto in A: il secondo punto di intersezione con la circonferenza di equazione (1) avrebbe ordinata negativa, e non apparterrebbe a γ.
Quindi il dominio "geometrico" di f è $]-\infty,-1[\ \cup [0,+\infty[$.
Questo può essere determinato anche per via algebrica, imponendo che l'ordinata di X che si legge nella (5) sia ≥ 0.
Si noti che $m=-1$ è il coefficiente angolare della retta tangente in A alla circonferenza: in tal caso $X\equiv A$, e il rapporto $\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$ non esiste.

Secondo metodo: con la trigonometria.

Per calcolare $\overline{XA}$ in funzione di α tracciamo da C la perpendicolare AT ad AX (figura 6). Risulta allora

$$\overline{AT}=a\cos\alpha,$$

$$\overline{TX}=\overline{CT}=a\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

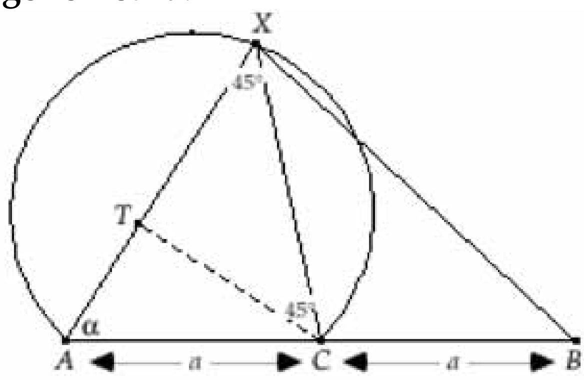


figura 6

L'uguaglianza

$$\overline{TX}=\overline{CT}$$

si giustifica osservan-do che il triangolo CTX è rettangolo isoscele.

Dunque

(3) $$\overline{XA} \;=\; \overline{AT} + \overline{TX} \;=\; a\,(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

Questo metodo per calcolare $\overline{XA}$ è particolarmente semplice, ma nasconde una difficoltà. Se il X viene scelto in modo che α sia ottuso (figura 7), T cade esternamente a XA, dalla parte di A, e si ha, diversamente dal caso precedente, $\overline{XA} = \overline{TX} - \overline{AT}$.

In questo caso però risulta

$$\overline{AT} = a\cos(\pi-\alpha) = -a\cos\alpha\ , \quad \overline{TX} = \overline{CT} = a\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = a\operatorname{sen}\alpha$$

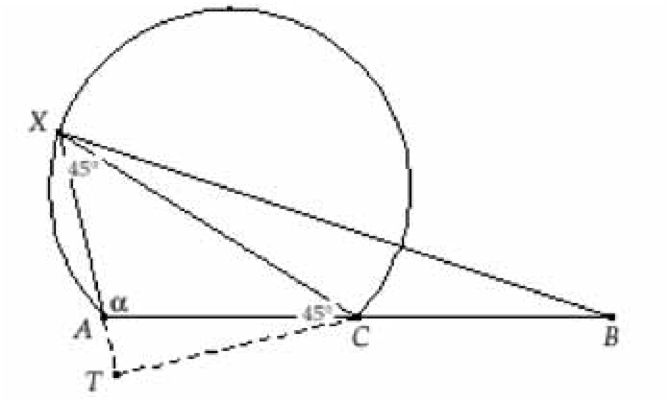


figura 7

cosicché nuovamente si ritrova per $\overline{XA}$ l'espressione (3), valida dunque in ogni caso.
Per evitare questa alternativa nel calcolo di $\overline{XA}$ si può seguire un procedimento diverso, utilizzando il Teorema della corda (cfr.4.48) nel triangolo ACX, del quale è noto il raggio della circonferenza circoscritta: $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Per detto Teorema risulta

$$\overline{XA} \;=\; 2\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(A\hat{C}X\right) \;=\; 2\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)$$

ed utilizzando ora le formule di sottrazione per il seno (cfr.4.14),

$$\overline{XA} \;=\; a\sqrt{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\operatorname{sen}\alpha\right] \;=\; a\,(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

come avevamo già ottenuto.
Per calcolare $\overline{XB}$ (o meglio: il suo quadrato) applichiamo il Teorema di Carnot (cfr.4.50) al triangolo ABX:

$$\begin{aligned}\overline{XB}^2 \;&=\; \overline{XA}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{XA}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha \;= \\ &=\; a^2\left[(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 + 4 - 4\,(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha\right]\end{aligned}$$

ovvero, svolgendo i calcoli,

(4) $$\overline{XB}^2 \;=\; a^2\left(5 - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - 4\cos^2\alpha\right)$$

Per esprimere il rapporto $\dfrac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2}$ in funzione di $\operatorname{tg}\alpha$ conviene dare a $\overline{XB}^2$ un'espressione omogenea di grado 2 rispetto a $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$.
Scriveremo allora (ricordando che $5 = 5 \cdot 1 = 5\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right)$)

$$\begin{aligned}\overline{XB}^2 &= a^2\left(5\cos^2\alpha + 5\operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - 4\cos^2\alpha\right) = \\ &= a^2\left(5\operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\overline{XB}^2}{\overline{XA}^2} = \frac{a^2\left(5\operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha\right)}{a^2\left(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\right)} = \frac{5\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\left(1 + \operatorname{tg}\alpha\right)^2}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo diviso numeratore e denominatore per $a\cos^2\alpha$; occorre quindi che sia $\cos\alpha \neq 0$, ossia $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, tenendo presente che nel problema attuale α può variare fra 0 e $\frac{3}{4}\pi$.
Sostituendo x al posto di $\operatorname{tg}\alpha$ otteniamo l'espressione

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2} \tag{5}$$

che coincide con quella ottenuta con metodi di geometria analitica, salvo che in quel caso la variabile indipendente portava il nome *m.*
Le limitazioni da imporre a x in relazione con il problema geometrico si deducono dal fatto che deve essere $\alpha \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$:
i valori assunti da $x = \operatorname{tg}\alpha$ quando α varia in questo insieme sono (si vedano le figure 8 e 9): $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left[0, +\infty\right[$, come avevamo già ottenuto in altro modo.

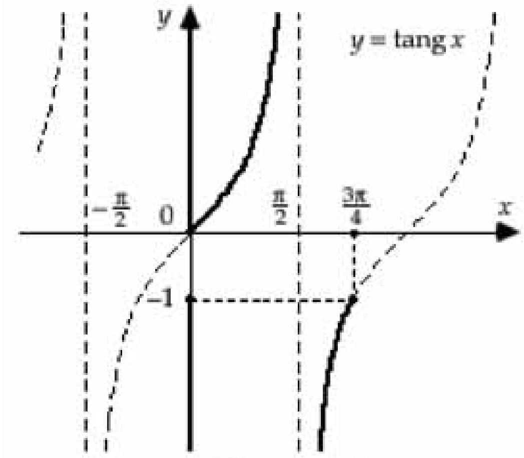


figura 8

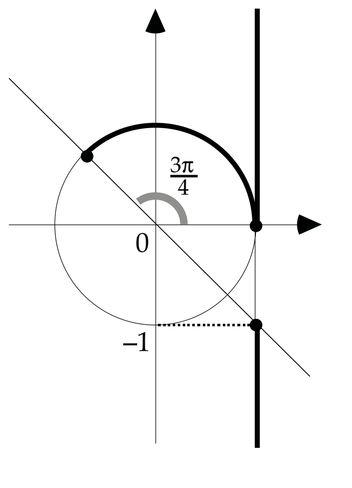


figura 9

Studio della funzione $f(x)=\dfrac{5x^2-2x+1}{(1+x)^2}$**.**

Dominio. Tenendo conto del problema geometrico, dovremmo studiare la funzione in $]-\infty,-1[\,\cup\,[0,+\infty[$; per completezza, svolgiamo lo studio nell'intero dominio naturale, che è $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[$.

Segno della funzione. La funzione è positiva in tutto il dominio. Infatti il denominatore è sempre ≥ 0, e il numeratore è sempre positivo, essendo un trinomio di secondo grado con il discriminante negativo e coefficiente positivo di x^2.

Limiti nei punti di frontiera del dominio. Risulta senza difficoltà

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=5 \quad ; \quad \lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$$

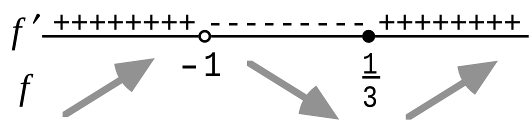
per cui il grafico di f ha un asintoto orizzontale nella retta $y=5$ e uno verticale nella retta $x=-1$.

Derivata, estremanti. Risulta

$$f'(x) = \frac{(10x-2)(1+x)^2-2(1+x)\left(5x^2-2x+1\right)}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{2\left(5x-1+5x^2-x-5x^2+2x-1\right)}{(1+x)^3} = \frac{4(3x-1)}{(1+x)^3}$$

Il segno di $f'(x)$ varia come indicato nel seguente schema, il quale mostra anche le conseguenze riguardanti la monotonia di *f*.

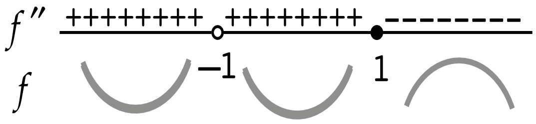


Il punto $x=-1$ non è estremante per f perché non appartiene al suo dominio; $x=\frac{1}{3}$ è punto di minimo relativo (e assoluto, come si nota osservando il grafico). Sostituendo $x=\frac{1}{3}$ nell'espressione di $f(x)$ si ottiene $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

Derivata seconda, flessi. Risulta

$$f''(x)=4\,\frac{3(1+x)^3-3(1+x)^2(3x-1)}{(1+x)^6}=12\,\frac{1+x-3x+1}{(1+x)^4}=24\,\frac{1-x}{(1+x)^4}$$

il cui segno varia come riportato nel seguente schema, che indica anche gli intervalli in cui f è concava e quelli in cui è convessa.



C'è un solo punto di flesso, $x = 1$; l'ordinata del flesso è $f(1) = 1$.
Le seguenti figure mostrano il grafico di f; la figura 10 rappresenta il dettaglio della figura 11 corrispondente al rettangolo grigio.

La parte di grafico riguardante la questione geometrica è quella in cui $x \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.

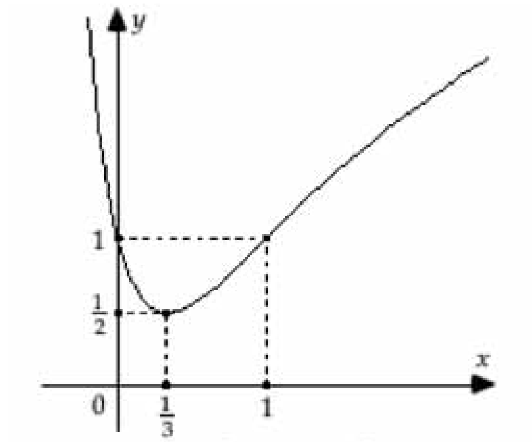


figura 10

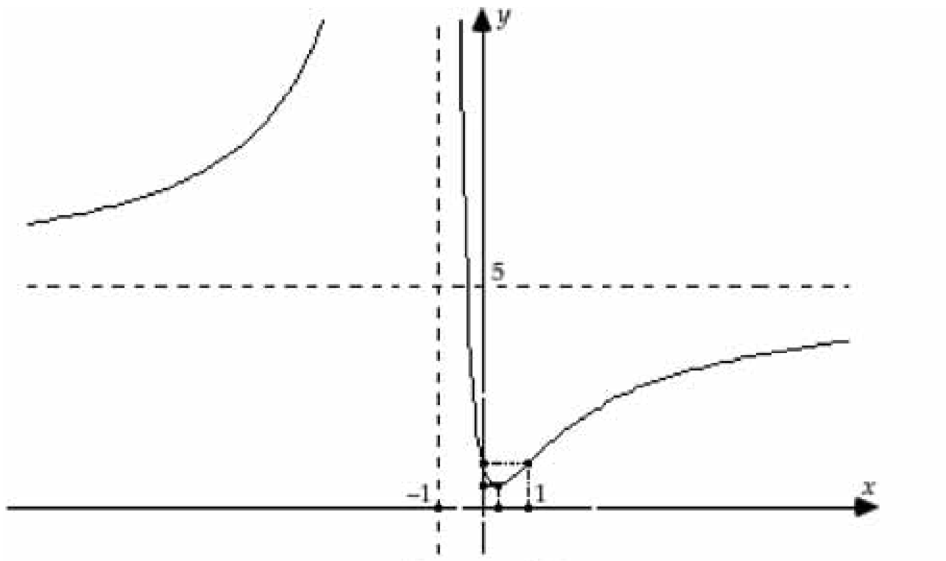


figura 11

Soluzione del problema 2

Domande *a*), *b*): determinazione dei valori di a e b e studio di *f*.

La funzione definita da

(1) $$f(x) = x^2 + a \ln(x + b)$$

esiste per $x \in]-b, +\infty[$. Affinché il grafico passi per l'origine, bisogna innanzitutto che sia $0 \in]-b, +\infty[$, cioè $b > 0$; poi,

imponendo che sia $f(0)=0$ otteniamo $a \cdot \ln b = 0$. Poiché a non è nullo, essendo per ipotesi >0, deve essere $\ln b = 0$ cioè $b = 1$.
Sostituiamo subito in (1) il valore di b ottenuto; l'espressione di $f(x)$ diventa

(2) $$f(x) = x^2 + a\ln(x+1).$$

La funzione così definita è derivabile in tutto il suo dominio; $x=1$ è punto interno al dominio (il quale è l'intervallo $]-1,+\infty[$). Per il Teorema di Fermat sugli estremanti, condizione <u>necessaria</u> (non sufficiente) affinché $x=1$ sia punto di minimo (relativo o assoluto) è che risulti $f'(1)=0$.
Calcolando la derivata in (2) otteniamo

(3) $$f'(x) = 2x + \frac{a}{x+1}$$

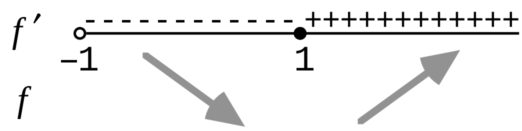
e quindi

$$f'(1)=0 \iff 2+\frac{a}{2}=0 \iff a=-4.$$

Sostituendo in (2) e in (3) il valore trovato di a abbiamo

(4) $$f(x)=x^2-4\ln(x+1) \quad ; \quad f'(x)=2x-\frac{4}{x+1}=2\frac{x^2+x-2}{x+1}$$

Non c'è più alcun parametro da determinare: verifichiamo dunque se davvero $x=1$ è punto di minimo assoluto per *f*; in caso contrario il problema proposto risulterà impossibile.
Poiché il dominio di f è l'intervallo $]-1,+\infty[$, il denominatore della frazione che esprime $f'(x)$ è sempre positivo nel dominio; il polinomio x^2+x-2 si annulla per $x=-2$ e $x=1$ ed è positivo esternamente a tali valori. Perciò il segno di $f'(x)$ varia come indicato nel seguente schema, con le conseguenze ivi segnalate sulla monotonia di *f*.



La funzione *f* è continua nel suo dominio, decrescente in $x \in]-1,1[$, crescente in $]1,+\infty[$: effettivamente 1 è punto di minimo assoluto per *f*.
Completiamo lo studio della funzione.
Non è possibile determinare in modo esatto gli intervalli in cui f è positiva o negativa, ovvero i punti di intersezione del grafico con l'asse *x* (tranne l'origine, imposta all'inizio).
Per un approfondimento di questo aspetto rimandiamo alla trattazione della successiva domanda ***c***).

Calcoliamo i limiti di f negli estremi del dominio.
Senza difficoltà si calcola

$$\lim_{x\to -1^+}\left(x^2-4\ln(x+1)\right)=+\infty;$$

invece, affrontando il calcolo di $\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-4\ln(x+1)\right)$ si incontra la forma indeterminata «$+\infty-\infty$». Risulta in effetti

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-4\ln(x+1)\right)=+\infty$$

perché x^2 "va all'infinito più rapidamente del logaritmo", quando x tende a $+\infty$.
Se vogliamo verificare questo risultato in maniera più dettagliata, scriviamo

(5) $$\lim_{x\to +\infty}\left(x^2-4\ln(x+1)\right)=\lim_{x\to +\infty}x^2\left[1-4\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

e calcoliamo $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ con l'aiuto del Teorema di de l'Hôpital cfr.5.22):

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x(x+1)}=0$$

cosicché nel secondo membro di (5) il fattore x^2 ha limite $+\infty$, mentre il fattore entro parentesi quadre ha limite 1; il prodotto ha pertanto limite $+\infty$, come avevamo detto.

Calcoliamo infine la derivata seconda.
Da $f'(x)=2x-\frac{4}{x+1}$ si ha

$$f''(x)=2+\frac{4}{(x+1)^2}$$

espressione evidentemente sempre positiva. Dunque f è <u>convessa</u> in tutto il suo dominio (tenendo presente che questo è un intervallo).
La figura 12 rappresenta il grafico di *f*.

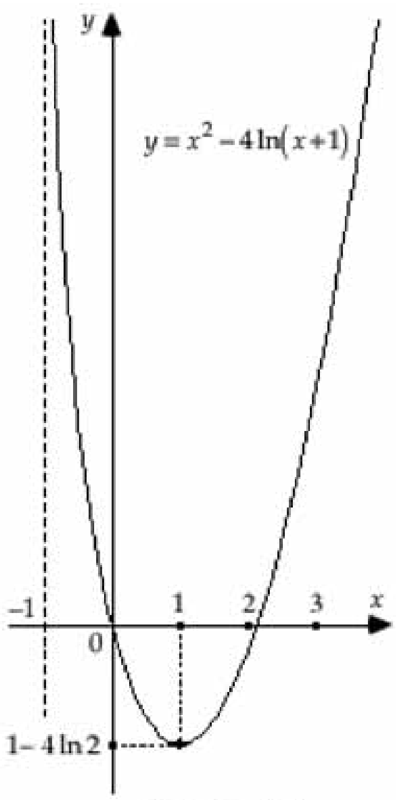


figura 12

Domanda *c*): determinazione approssimata dell'intersezione positiva di Γ con l'asse *x*.

Trattandosi di una funzione continua che assume valore negativo in $x = 1$ ($f(1) = -2$) e che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, essa si annullerà almeno una volta nell'intervallo $]1, +\infty[$; inoltre abbiamo dimostrato che f è monotona crescente in tale intervallo, pertanto l'intersezione con l'asse delle ascisse è unica.

Per calcolarla utilizzeremo il metodo di Newton o delle tangenti; la funzione in oggetto è infatti convessa in tutto il suo dominio; la figura 13 illustra tale metodo.

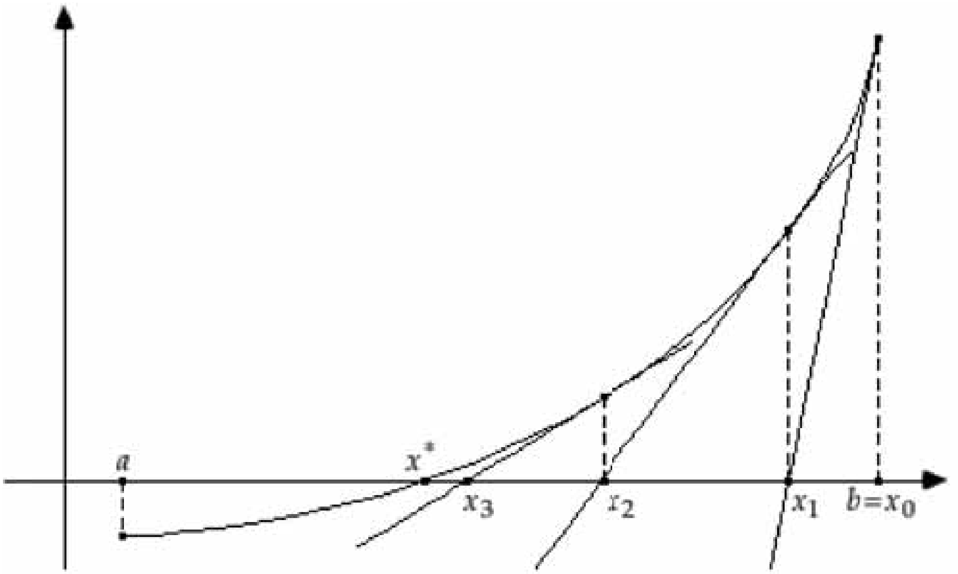


figura 13

Occorre scegliere il secondo estremo b dell'intervallo $[a, b]$ in cui applicare il metodo, in modo che sia $f(b) > 0$; sappiamo che un tale punto deve esistere perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; lo possiamo cercare per tentativi. Risulta:

$$f(2) = 4 - 4\ln(3) = 4(1 - \ln(3)) < 0, \text{ perché } \ln(3) > 1 = \ln(e).$$

Quindi, come si può vedere anche dal grafico di *f*, riportato nella figura 12, la funzione è ancora negativa nel punto $x = 2$. Invece

$$f(3) = 9 - 4\ln(4) \approx 3,45 > 0.$$

Possiamo quindi cercare la soluzione approssimata dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[2, 3]$.

Dal punto $(3, f(3))$ conduciamo la retta tangente al grafico di *f*; sia x_1 il punto in cui essa interseca l'asse *x*. Dal punto $(x_1, f(x_1))$

conduciamo la retta tangente al grafico di f; sia x_2 il punto in cui essa interseca l'asse x. Analogamente troveremo x_3, x_4, e così via.
La successione (x_n) così costruita è decrescente e converge per $n \to +\infty$ alla soluzione x^* dell'equazione $f(x) = 0$. Scegliendo uno dei valori della successione otterremo una approssimazione per eccesso di x^*. Il testo non stabilisce con quale precisione vada calcolata la soluzione; il metodo di Newton genera una successione che converge molto velocemente a x^*, pertanto saranno sufficienti poche iterazioni per ricavare una "buona" approssimazione della soluzione. Per stabilire però quanto l'approssimazione ottenuta sia "buona" sarebbero necessarie altre indagini, come la ricerca di una successione che approssimasse x^* per difetto. Ciò sarebbe possibile, per esempio, con il metodo delle corde. Per una trattazione più dettagliata dei diversi metodi si rimanda alla soluzione del compito P.N.I. 2000 sessione suppletiva, quesito 2.
Nelle condizioni in cui ci troviamo la successione definita per ricorrenza mediante il metodo delle tangenti è:

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

che, nel nostro caso diventa:

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^{\,2} - 4 \cdot \ln(x_n + 1)}{2\dfrac{x_n^{\,2} + x_n - 2}{x_n + 1}} \end{cases}$$

Procedendo con i calcoli otteniamo:

$$x_1 \approx 2,309035889,\quad x_2 = 2,14917148624,$$
$$x_3 = 2,13913885626,\ x_4 = 2,1390985787.$$

Per avere un'idea della velocità di convergenza di questo metodo riportiamo il valore della soluzione ottenuto mediante un computer con 11 cifre decimali esatte: $x^* = 2,13909857805$. Come si vede dopo 4 iterazioni abbiamo ottenuto un'approssimazione che differisce da x^* per meno di 10^{-9}. Per essere certi di ottenere una soluzione così precisa con il metodo di bisezione avremmo dovuto compiere almeno 30 iterazioni.

Domanda *d*): equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$.

Tenendo presente che $y(1)$ (o meglio: $f(1)$) vale $1-4\ln 2$, e ricordando le formule che descrivono la simmetria assiale rispetto a una retta parallela all'asse delle ascisse (cfr.3.79), abbiamo in questo caso le equazioni

(6) $$\begin{cases} X = x \\ Y = 2-8\ln 2 - y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = X \\ y = 2-8\ln 2 - Y \end{cases}$$

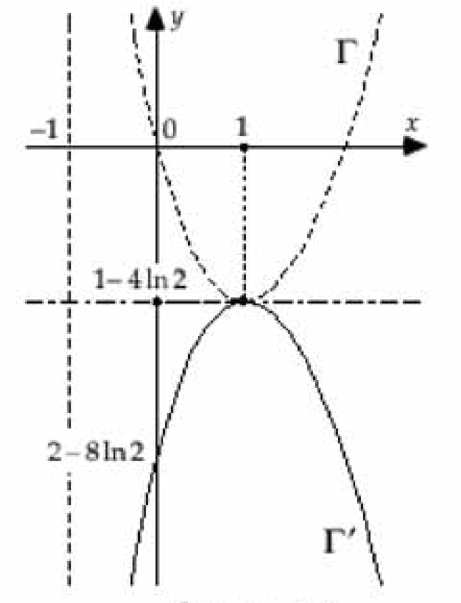


figura 14

per la simmetria e per la sua inversa (ricordiamo che ogni simmetria assiale coincide con la propria inversa).

Applicando le (6) all'equazione di Γ otteniamo

$$2-8\ln 2 - Y \;=\; X^2 - 4\ln(X+1)$$

ovvero, indicando nuovamente le variabili correnti con x e y anziché X e Y,

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{equazione di } \Gamma': \\ y \;=\; 2-8\ln 2 - x^2 - 4\ln(x+1) \end{array}}$$

La figura 14 mostra le curve Γ e Γ' e l'asse rispetto al quale è stata effettuata la simmetria.

Domanda *e*): disegno della curva Γ'' di equazione $y = |f(x)|$.

Tale grafico si ottiene con una operazione puramente geometrica dalla curva Γ, grafico di $y = f(x) \equiv x^2 - 4\ln(x+1)$.
Poiché è

$$|f(x)| \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

la curva Γ'' coincide con Γ negli intervalli in cui $f(x) \geq 0$, cioè per

$$x \in]-1,0] \cup [x^*, +\infty[$$

(x^* è il punto di cui si tratta nella domanda ***c***)); invece Γ'' è simmetrica di Γ rispetto all'asse delle ascisse dove è $f(x) < 0$, cioè per

$$x \in]0, x^*[.$$

Si ottiene il grafico rappresentato nella figura 15, nella quale è disegnata anche la curva Γ, a tratteggio grigio.

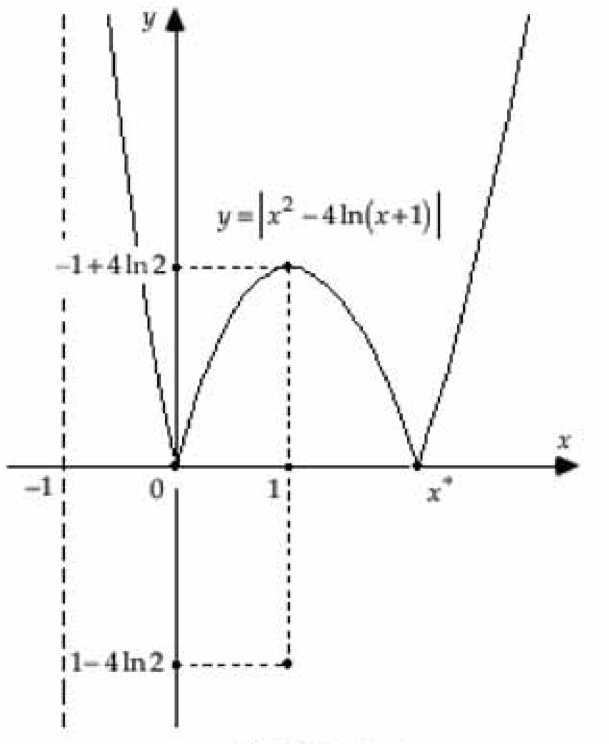


figura 15

Questionario

Quesito 1

Il quesito chiede di dimostrare una relazione tra i volumi di certi solidi. La domanda non è ben posta, perché non chiarisce quali formule siano da ritenere note e si possano quindi utilizzare nella dimostrazione richiesta.
Proponiamo tre differenti risoluzioni, basate su premesse diverse di volta in volta.

I. Le ipotesi più "comode" per dimostrare quanto richiesto consistono nel ritenere note le formule che esprimono il volume di una sfera di raggio noto r:

(1) *Volume sfera* : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

ed il volume di un cilindro circolare retto con raggio di base r e altezza h:

(2) *Volume cilindro* : $\pi r^2 h$.

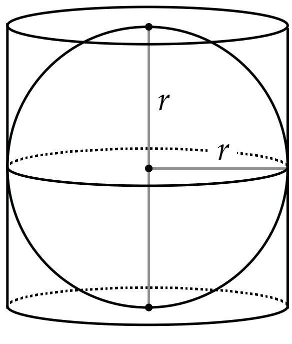


figura 16

Un cilindro circoscritto ad una sfera di raggio r ha lo stesso raggio di base r della sfera ed altezza $h = 2r$. Così, la formula (2) fornisce

$$\textit{Volume cilindro circoscritto}: \quad \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

Il rapporto fra i due volumi è $\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \dfrac{2}{3}$, come si voleva dimostrare.

II. Calcoliamo i volumi dei due solidi mediante due integrali, utilizzando la formula che esprime il volume di un solido di rotazione.

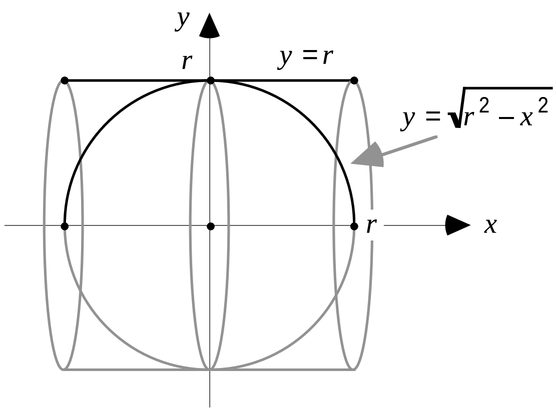


figura 17

Una sfera di raggio r è generata dalla rotazione di una semicirconferenza di uguale raggio attorno al suo diametro. Scegliamo il sistema di riferimento in modo che il centro della semicirconferenza si trovi nell'origine e il diametro giaccia sull'asse x. L'equazione della semicirconferenza situata dalla parte delle $y \geq 0$ è:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ con } x \in [-r, r]$$

Il cilindro circoscritto alla sfera è generato dal segmento $y = r$, ancora con $x \in [-r, r]$. Perciò avremo (cfr.5.31)

$$\textit{Volume sfera} = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-r}^{x=r} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\textit{Volume cilindro} = \pi \int_{-r}^{r} r^2 \, dx = \pi r^2 \int_{-r}^{r} 1 \, dx = 2\pi r^3 .$$

Il rapporto dei due volumi è $\frac{2}{3}$, come si è già visto.

III. Una dimostrazione "geometrica" della proprietà in questione si può ottenere assumendo per nota le formule (2) per il volume di un cilindro, e quella che esprime il volume di un cono circolare retto con raggio di base r e altezza h:

(3) $$\textit{Volume cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

e inoltre l'equivalenza della "Scodella di Galileo" con il cono avente raggio di base e altezza uguali al raggio della "scodella".

Ricordiamo che la Scodella di Galileo è il solido che si ottiene togliendo da un cilindro circolare retto con raggio di base ed altezza uguali a r, la semisfera di raggio r avente la base coincidente con una delle basi del cilindro, e situata internamente ad esso. (figura 18).

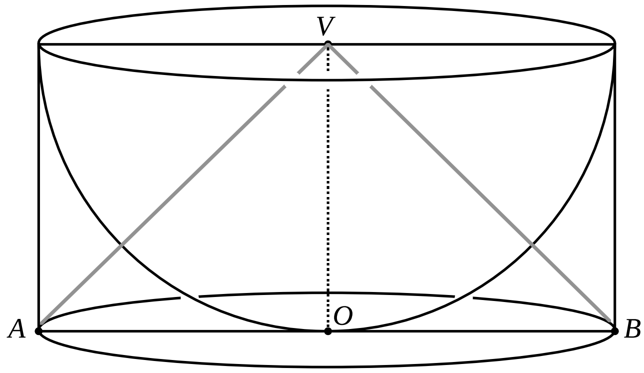


figura 18

Ebbene, si può dimostrare che <u>la "scodella" è equivalente al cono la cui base coincide con quella della "scodella", e il vertice coincide con il centro *V* della semisfera</u>. Ciò si prova mostrando che, per ogni piano α passante per un punto di OV e perpendicolare a tale segmento, il cerchio sezione di α con il cono è equivalente alla corona circolare intersezione di α con la "scodella"; l'equivalenza dei solidi segue dal Principio di Cavalieri (i dettagli di questa dimostrazione si possono trovare su vari testi che trattano la Geometria dello spazio).

Pertanto il volume della "scodella" si ottiene da (3) ponendo $h = r$:

$$\text{(4)} \qquad \textit{Volume scodella} = \frac{1}{3}\pi r^3.$$

Poiché il volume del cilindro circoscritto alla scodella è (da (2), con $h = r$)

$$\textit{Volume cilindro} = \pi r^3$$

segue per differenza che il volume della semisfera è

$$\textit{Volume semisfera} = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\textit{Volume cilindro}.$$

Da ciò segue subito che l'intera sfera è equivalente a $\frac{2}{3}$ del cilindro equilatero ad essa circoscritto, come si voleva.

Osserviamo che in questo ragionamento non viene assunta come nota la formula per il volume di una sfera; questa viene anzi dedotta nel modo sopra esposto.

Quesito 2

La richiesta di "determinare il numero di soluzioni dell'equazione…" non deve essere interpretata come invito a risolvere l'equazione, e poi vedere quante soluzioni si sono ottenute: ciò in generale non è possibile, e il caso attuale non fa eccezione.
Il numero di soluzioni si ottiene mediante lo studio di una funzione dedotta dal testo del problema. La scelta di tale funzione va fatta con criterio, per evitare di imbattersi in uno studio non semplice.

Poiché 0 non è soluzione dell'equazione proposta, questa equivale a

(1) $$e^x + e^{-x} - \frac{2}{x} = 0$$

Studiamo la funzione

(2) $$f(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{x}$$

limitatamente a quanto occorre per determinare il numero di intersezioni del suo grafico con l'asse x.
Se $x < 0$ tutti e tre gli addendi in (2) sono positivi, quindi $f(x) > 0$, e non ci sono soluzioni negative dell'equazione $f(x) = 0$.
Studiamo quindi f nell'intervallo $]0, +\infty[$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \left(e^x + e^{-x} - \frac{2}{x} \right) = -\infty \quad , \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(e^x + e^{-x} - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

Dunque f assume in $]0, +\infty[$ sia valori negativi, sia valori positivi. Per il Teorema di Bolzano, in $]0, +\infty[$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.
La derivata è

(3) $$f'(x) = e^x - e^{-x} + \frac{2}{x^2}$$

Questa è sempre positiva in $]0, +\infty[$. Infatti, essendo $x > 0$ risulta $e^x > e^{-x}$, quindi

$$e^x - e^{-x} > 0;$$

poi, l'addendo $\frac{2}{x^2}$ è evidentemente positivo. Dunque f è strettamente crescente in $]0, +\infty[$. Pertanto la soluzione di $f(x) = 0$, della quale avevamo già provato l'esistenza, è unica.

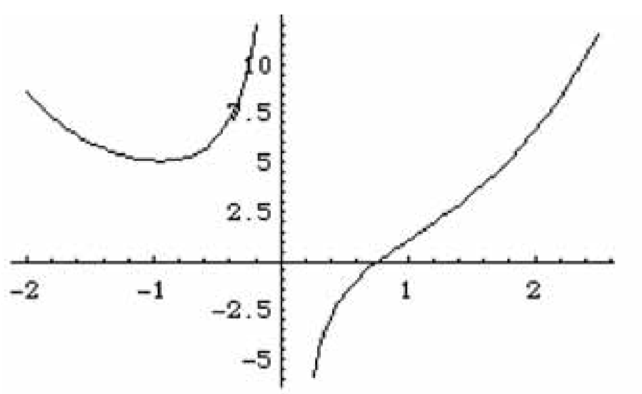


figura 19

In conclusione, l'equazione $xe^{x}+xe^{-x}-2=0$ ha esattamente una soluzione. La figura 19 rappresenta il grafico della funzione f (in scala non monometrica).

Probabilmente alcuni studenti hanno più familiarità con un procedimento un po' diverso: scritta l'equazione nella forma

$$e^{x}+e^{-x} = \frac{2}{x}$$

si studiano le funzioni al primo e al secondo membro, e si cerca di capire dai grafici risultanti quanti sono i punti di intersezione delle due curve.

In questo caso gli studi delle due funzioni

$g(x)=e^{x}+e^{-x}$ e $h(x)=\frac{2}{x}$

non presentano alcuna difficoltà (lasciamo il compito al lettore). Si ottengono i grafici rappresentati nella figura 20, dai quali "si vede" che c'è uno, ed un solo punto di intersezione.

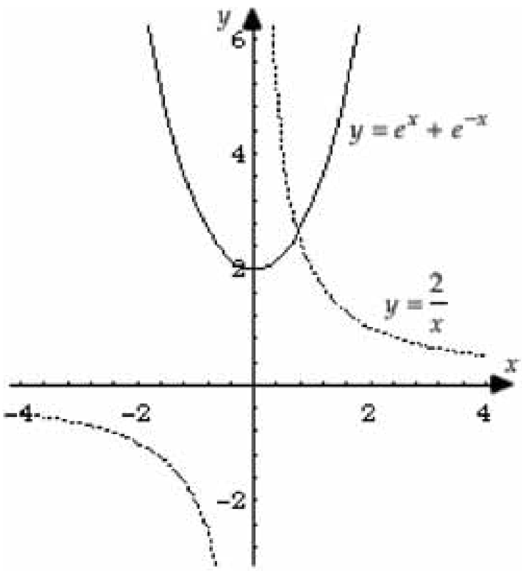


figura 20

Il procedimento è semplice, ed in effetti la risposta richiesta (cioè il numero di soluzioni) appare dal disegno in modo evidente; tuttavia questo metodo non è altrettanto rigoroso quanto il precedente: non è facile, infatti, giustificare rigorosamente quanto si vede nella figura, cioè che esiste un unico punto di intersezione fra i due grafici.

Quesito 3

Il quesito, di natura teorica, richiede una semplice applicazione del Teorema di Rolle.

Siano a, b due radici distinte del polinomio p, cioè $p(a)=p(b)=0$; supponiamo $a<b$.

Nell'intervallo $[a,b]$ la funzione p soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle: la funzione è infatti

- continua in $[a,b]$
- derivabile in $]a,b[$ (in effetti, è derivabile anche in a e in b)
- $p(a)=p(b)$ (perché in entrambi i punti il polinomio vale zero).

Per il Teorema di Rolle esiste allora in $]a,b[$ almeno un punto c in cui $p'(c) = 0$. Ciò è quanto si doveva dimostrare.
Osserviamo che questo ragionamento non dipende dal fatto che p sia un *polinomio*: è sufficiente supporre che p sia una funzione *derivabile* definita in tutto **R**, per giungere alle stesse conclusioni: tra due punti in cui è nulla la funzione ce n'è almeno uno in cui è nulla la derivata.

Quesito 4

È richiesto il calcolo della derivata di una certa funzione; tale derivata risulta identicamente nulla. Poiché il dominio della funzione è un intervallo, se ne deduce che la funzione è costante.

Se $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x \quad (x \in [-1,1])$ risulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (x \in]-1,1[).$$

La funzione, avendo la derivata costantemente uguale a zero in un <u>intervallo</u>, è costante in tale intervallo (per la dimostrazione di questo fatto, conseguenza del Teorema di Lagrange del valor medio, si veda la soluzione del Quesito 5, Sessione ordinaria a.s. 2000-2001).
Per determinare il valore costante di f, basta scegliere un punto a piacere nell'intervallo; per esempio 0: per ogni $x \in]-1,1[$ (e per continuità, anche in –1 e in 1) si avrà

$$f(x) = f(0) = \operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Aggiungiamo alcune osservazioni, pur se non strettamente legate alla domanda del testo.

1) *L'identità* $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ \ \forall\, x \in [-1,1]$ *può essere provata in modo elementare, cioè senza fare uso del calcolo differenziale.*

Siano infatti $x \in [-1,1]$, $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $\beta = \arccos x$. Allora

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \operatorname{sen}\alpha = x \quad ; \qquad \beta \in [0,\pi],\ \cos\beta = x.$$

Poiché $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, è $\frac{\pi}{2} - \alpha \in [0,\pi]$; inoltre risulta

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha = x = \cos\beta$$

Dunque, β e $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sono due numeri (o "angoli", se si vuole) <u>entrambi appartenenti all'intervallo</u> $[0,\pi]$, che hanno lo stesso coseno. Ma la funzione coseno è <u>iniettiva</u> nell'intervallo $[0,\pi]$; quindi dall'uguaglianza $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta$ segue $\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$, cioè

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \quad \text{cioè} \quad \operatorname{arc\,sen} x+\operatorname{arc\,cos} x=\frac{\pi}{2}.$$

2) *L'implicazione* $f'\equiv 0 \;\Rightarrow\; f$ *costante è falsa, se il dominio di* f *non è un intervallo.*

Per esempio, sia $f(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Tuttavia f <u>non è</u> costante nel suo dominio: per esempio,

$$f(1)=2\operatorname{arctg}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \;, \qquad f(-1)=2\operatorname{arctg}(-1)=2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

f è costante in ciascuno dei due intervalli componenti il dominio, avendo in ciascuno di essi la derivata identicamente nulla, ma non è costante sull'intero dominio. Il grafico di f è rappresentato nella figura 21

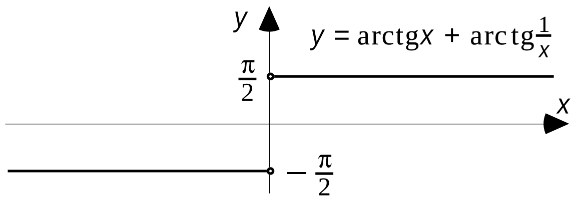


figura 21

Quesito 5

Si richiede il calcolo, molto semplice, della primitiva di una funzione.

Riteniamo che la sigla «$\log x$» usata nel testo rappresenti il logaritmo naturale, cioè in base *e*, usualmente indicato con $\ln x$.

Osserviamo che la derivata di $\ln x$ è $\frac{1}{x}$; perciò

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

con C costante reale qualunque.

Se la base dei logaritmi fosse stata un'altra, per esempio 10, il problema non cambiava di molto:

$$\int\frac{\log_{10} x}{x}\,dx=\int\frac{\ln x}{\ln 10\cdot x}\,dx=\frac{1}{\ln 10}\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2+C\right)$$

Quesito 6

È un quesito di analisi numerica che propone il calcolo approssimato di un integrale. Anche in questo caso non è specificata la precisione richiesta. Successivamente, però, poiché l'integrale è di semplice esecuzione in forma esatta, si richiede di confrontare il valore ottenuto in forma approssimata con il valore esatto.

Cominciamo col calcolare il valore esatto dell'integrale; poiché una primitiva di $\operatorname{sen} x$ è $-\cos x$ avremo:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2 .$$

Calcoliamo ora l'integrale in forma approssimata, facendo uso del metodo dei trapezi. Dividiamo l'intervallo $[0,\pi]$ di integrazione in n parti uguali, con n numero intero arbitrario (in generale, aumentando il valore di n l'approssimazione migliora, ma aumentano anche i calcoli da svolgere).
In ciascun intervallino determinato dalla suddivisione, approssimiamo la funzione integranda con la retta congiungente i punti del grafico aventi per ascisse gli estremi di quell'intervallino. In questo modo il grafico della funzione viene approssimato con una spezzata; l'area sotto la curva viene approssimata con l'area sotto la spezzata, cioè con la somma delle aree di n trapezi aventi tutti la stessa altezza $h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n}$, e basi che misurano quanto i valori di f negli estremi di ciascun intervallino. Scriviamo nel caso generale la formula che esprime la somma delle aree dei trapezi.
Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$, mediante i punti

$$x_0 = a\,;\ \ x_1 = a + h\,;\ \ x_2 = a + 2h\,;\ \ \ldots\,;\ \ x_n = a + nh = b\,.$$

Così abbiamo

$$\begin{array}{lcl}
Area\ 1°\ trapezio & = & \frac{1}{2}h\left(f(x_0) + f(x_1)\right) \\
Area\ 2°\ trapezio & = & \frac{1}{2}h\left(f(x_1) + f(x_2)\right) \\
\quad\ldots & & \quad\ldots \\
Area\ (n-1)°\ tr. & = & \frac{1}{2}h\left(f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})\right) \\
Area\ n°\ trapezio & = & \frac{1}{2}h\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) \\
\hline
Somma\ aree & = & h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) \\
\hline\hline
\end{array}$$

Applichiamo la formula nel caso attuale.

Prendiamo per esempio $n = 4$ (figura 22); in questo caso è:

$$h = \frac{\pi}{4},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{3}{4}\pi,\ x_4 = \pi.$$

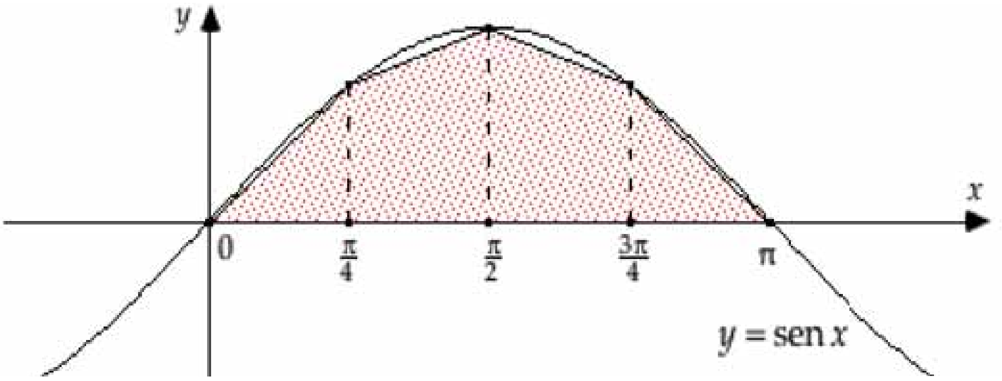


figura 22

La seguente tabella riporta i valori necessari per l'applicazione della formula:

k	x_k	$f(x_k)$	$\frac{1}{2}f(x_k)$
0	0	0	0
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
2	$\frac{\pi}{2}$	1	
3	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
4	π	0	0

La somma dei termini è

$$\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \tfrac{1}{2}f(x_4)\right) = 1 + \sqrt{2},$$

quindi il valore approssimato dell'integrale con $n = 4$ è

(1) $$\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{\pi}{4} \approx 1{,}896119.$$

Nel caso di $n = 6$ avremo, invece:

$$h = \frac{\pi}{6},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{3},\ x_3 = \frac{\pi}{2},\ x_4 = \frac{2}{3}\pi.\ x_5 = \frac{5}{6}\pi,\ x_6 = \pi.$$

Svolgendo i calcoli come nel caso precedente abbiamo:

k	x_k	$f(x_k)$	$\frac{1}{2} f(x_k)$
0	0	0	0
1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
3	$\frac{\pi}{2}$	1	
4	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
5	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	
6	π	0	0

Sommando:

$$\left(\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \tfrac{1}{2} f(x_6)\right) = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Quindi il valore dell'approssimazione con $n = 6$ è

(2) $$\left(2 + \sqrt{3}\right)\frac{\pi}{6} \approx 1,954097\,.$$

Quest'ultimo valore è maggiore del precedente; esso costituisce ancora un'approssimazione *per difetto* dell'integrale e l'approssimazione è migliore della precedente, com'era da aspettarsi.

Ricordiamo la formula che permette di stimare l'errore che si commette approssimando un'integrale con la regola dei trapezi:

Sia ε_n la differenza fra $\int_a^b f(x)\,dx$ e la sua approssimazione ottenuta con la regola dei trapezi dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali. Sia M un numero positivo tale che

$$|f''(x)| \le M \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Allora è

(3) $$|\varepsilon_n| \ \le\ \frac{M \cdot (b-a)^3}{12\, n^2}.$$

Utilizziamo la formula per valutare l'errore commesso nelle approssimazioni precedenti. Calcolare il valore di M nel caso attuale è semplice, perché $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, quindi $M = 1$. Avremo allora da (3), nel caso attuale:

$$(4) \qquad |\varepsilon_4| \le \frac{\pi^3}{192} \approx 0,1615 \qquad \text{e} \qquad |\varepsilon_6| \le \frac{\pi^3}{432} \approx 0,0718$$

Questa è una <u>stima</u> dell'errore di approssimazione; questa volta però abbiamo a disposizione il valore esatto dell'integrale: esso vale 2, come abbiamo osservato. Quindi i valori effettivi di ε_4 e ε_6 sono:

$$\varepsilon_4 = 0,103881 \quad \text{e} \quad \varepsilon_6 = 0,045903$$

i quali effettivamente rientrano nelle limitazioni (4).

Quesito 7

Si tratta di un semplice esercizio di analisi numerica, che richiede il calcolo approssimato delle soluzioni di un'equazione. Il testo non è formulato in modo molto preciso perché non quantifica la precisione richiesta nel calcolo di "un'approssimazione della soluzione".

Cominciamo col dimostrare che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ha una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Posto $f(x) = x - e^{-x}$ abbiamo che f è una funzione continua su tutto il suo dominio, che è $]-\infty, +\infty[$. I valori assunti da f negli estremi dell'intervallo assegnato sono: $f(0) = -1$ e $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$; assumendo valori di segno opposto ed essendo continua sull'intervallo $[0,1]$ la funzione deve assumere il valore zero almeno in un punto, per il teorema di Bolzano. Esiste quindi un punto $x^* \in [0,1]$ tale che $f(x^*) = 0$. Verifichiamo ora che tale punto è unico; per fare ciò è sufficiente dimostrare che f è monotona sull'intervallo. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 1 - (-1)\, e^{-x} = 1 + e^{-x}$$

evidentemente positiva per ogni valore reale di x. La funzione è quindi strettamente crescente e la soluzione unica.

Per determinate un'approssimazione di x^* utilizzeremo il *metodo di bisezione*. È questo il metodo più elementare fra quelli adatti allo scopo; rispetto ad altri (metodo delle corde, metodo delle tangenti) converge più lentamente; cioè, a parità del numero di iterazioni dà un'approssimazione in generale meno buona degli altri metodi; a suo favore vi è la semplicità di esecuzione e la facilità della stima dell'errore commesso in ogni passo.

Il testo, come già osservato, non precisa l'approssimazione richiesta; troveremo la soluzione con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$ il che, procedendo con il metodo di bisezione con un intervallo iniziale di lunghezza 1, comporta l'esecuzione di almeno 7 iterazioni; infatti ad ogni passo la lunghezza dell'intervallo contenente x^* viene dimezzata, e quindi l'intervallo n-esimo ha lunghezza 2^{-n}. Si ha allora

$$2^{-n} < \frac{1}{100} \iff -n \cdot \log 2 < \underbrace{\log\left(\frac{1}{100}\right)}_{=-2} \iff n > \frac{2}{\log 2} \cong 6,6$$

(«log» indica il logaritmo in base 10; nell'ultimo passaggio il verso della disuguaglianza è cambiato perché abbiamo diviso entrambi i membri per il numero <u>negativo</u> $-\log 2$).

Il più piccolo numero intero $\geq \frac{2}{\log 2}$ è 7; quindi con 7 iterazioni raggiungeremo la precisione desiderata.

Chiamiamo $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Chiamiamo poi m_0 il punto medio dell'intervallo $[a_0, b_0]$:

$$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 .$$

Ora calcoliamo $f(m_0) = f(0,5) = -0,10653\ldots$.

Allora $x^* \in [m_0, b_0] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, perché negli estremi di questo intervallo f assume valori di segno opposto. Chiamiamo allora $a_1 = m_0$, $b_1 = b_0$.

Il metodo di bisezione prosegue secondo questo principio: consideriamo ogni volta il punto medio dell'ultimo intervallo in cui abbiamo localizzato x^*; calcolando il valore di f in tale punto medio sapremo se x^* si trova a sinistra o a destra di esso, e in base a ciò sceglieremo il successivo intervallo, di lunghezza metà della precedente, in cui avremo localizzato x^*.

Avendo iniziato con $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$, la regola di iterazione sarà la seguente:

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2} \; ; \quad \begin{cases} \text{se } f(m_n) < 0: & a_{n+1} = m_n \; , \quad b_{n+1} = b_n \\ \text{se } f(m_n) > 0: & a_{n+1} = a_n \; , \quad b_{n+1} = m_n \end{cases}$$

Ad ogni passo, a_n e b_n danno un'approssimazione per difetto e una per eccesso di x^*; si proseguirà fino a raggiungere la precisione desiderata.

La seguente tabella riassume i valori ottenuti; le colonne relative ai valori della funzione riportano soltanto il <u>segno</u> del risultato, perché solo questo occorre per l'applicazione del metodo. L'ultima colonna contiene la lunghezza dell'n-esimo intervallo, ovvero l'errore che si commetterebbe se si attribuisse a x^* il valore di a_n oppure di b_n.

n	a_n	b_n	m_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(m_n)$	$\lvert a_n - b_n \rvert$
0	0	1	$0,5$	$-$	$+$	$-$	1
1	$0,5$	1	$0,75$	$-$	$+$	$+$	$0,5$
2	$0,5$	$0,75$	$0,625$	$-$	$+$	$+$	$0,25$
3	$0,5$	$0,625$	$0,5625$	$-$	$+$	$-$	$0,125$
4	$0,5625$	$0,625$	$0,59375$	$-$	$+$	$+$	$0,0625$
5	$0,5625$	$0,59375$	$0,578125$	$-$	$+$	$+$	$0,03125$
6	$0,5625$	$0,578125$	$0,5703125$	$-$	$+$	$+$	$0,015625$
7	$0,5625$	$0,5703125$	$0,56640625$	$-$	$+$	$-$	$0,0078125$

Osservando la riga 7 vediamo subito che x^* è compreso fra $a_7 = 0,5625$ e $b_7 = 0,5703125$, e ciò localizza già x^* in un intervallo di lunghezza $< \frac{1}{100}$; il risultato migliora ulteriormente se osserviamo i segni di $f(a_7)$, $f(b_7)$, $f(m_7)$: se ne trae che x^* è compreso fra $m_7 = 0,56640625$ e $b_7 = 0,5703125$. Considerando il punto medio dell'intervallo si ottiene per x^* il valore 0,568359375.

L'approssimazione di x^* con due cifre significative è quindi:

$$\boxed{\textit{Soluzione di } x - e^x = 0 \textit{ con due cifre significative}: \; x^* = 0,56}$$

Per completezza, segnaliamo che il valore di x^* con undici cifre decimali esatte, ottenuto con l'ausilio del calcolatore, è $x^* = 0,56714329041$. Come si vede, il valore da noi trovato presenta già la terza cifra decimale errata.

Quesito 8

È un semplice problema di calcolo delle probabilità. Mostriamo due possibili risoluzioni, la prima basata unicamente sulla definizione classica di probabilità, la seconda che utilizza il Teorema della probabilità composta.

Primo metodo. La definizione classica di probabilità (adatta al caso attuale, nel quale non appaiono esiti *a priori* più probabili di altri) definisce la probabilità di un evento E come il rapporto fra il numero di esiti favorevoli ad E ed il numero complessivo di esiti possibili.
Attualmente, la prova oggetto dello studio è la "estrazione di un sottoinsieme di 3 elementi dall'insieme dei 16 allievi".

Il numero di esiti possibili è il coefficiente binomiale $\binom{16}{3} = 560$.

Il numero degli esiti favorevoli all'evento

E "tutti gli allievi scelti sono maschi"

è il coefficiente binomiale $\binom{12}{3} = 220$. Si tratta infatti del numero di sottoinsiemi con 3 elementi dell'insieme dei 12 maschi.

Perciò

$$P(E) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{220}{560} = \frac{11}{28} \cong 0.393$$

Secondo metodo.

Immaginiamo che i tre studenti vengano scelti uno alla volta. Siano A, B, C gli eventi:

A : «*il primo allievo estratto è maschio*»

B : «*il secondo allievo estratto è maschio*»

C : «*il terzo allievo estratto è maschio*»

Per il teorema della probabilità composta si ha

$$P(E) = P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}.$$

Quesito 9

Si chiede di spiegare il significato di "sistema assiomatico", in particolare riferendosi alla geometria.

Che cosa significa "dimostrare un Teorema"? Potremmo descrivere intuitivamente questa locuzione nel modo seguente:

> *"esporre un ragionamento che illustra come la proprietà in oggetto (il Teorema) risulti quale conseguenza di altre proprietà già conosciute".*

Le proprietà già conosciute possono essere teoremi precedentemente dimostrati; anche in questo caso però, risalendo la successione di dimostrazioni di tali teoremi giungeremo infine a proprietà "primitive" per le quali non c'è la possibilità di fornire una dimostrazione: queste vengono assunte come "verità" che stanno alla base della teoria, e non possono essere dimostrate. Tali proprietà sono gli *assiomi* della teoria in questione.

Gli assiomi di una teoria non possono essere scelti arbitrariamente: essi devono soddisfare alcuni requisiti. Il più importante è la *non* *contraddittorietà*: non deve essere possibile dedurre dagli assiomi una proposizione ed anche la sua negazione.

È opportuna anche la *indipendenza* degli assiomi: cioè nessuno di essi deve potersi dedurre come conseguenza degli altri; se è così, quell'assioma può essere soppresso, lasciando la teoria invariata.

Sarebbe auspicabile la *completezza* del sistema assiomatico, ossia che, per ogni proposizione $\wp$ sintatticamente corretta della teoria in oggetto, fosse possibile dedurre dagli assiomi $\wp$ oppure la negazione di $\wp$ (non entrambe le cose, altrimenti la teoria sarebbe contraddittoria).
Quest'ultimo requisito tuttavia non è realizzabile: è stato provato (Gödel, 1931) che in ogni teoria ci sono proposizioni *indecidibili*, cioè delle $\wp$ tali che né $\wp$ né la sua negazione possono essere dedotte dagli assiomi.

Oltre a questi requisiti di tipo tecnico, gli assiomi di una teoria che vuole descrivere fenomeni vicini al mondo reale vengono scelti in modo da apparire "ragionevoli", e in qualche modo "intuitivamente evidenti". Così è, in particolare, per gli assiomi della geometria. Per esempio, si assume che *per due punti distinti passa una ed una sola retta.* Questa proprietà, per quanto possa apparire evidente, non è dimostrabile in base a proprietà più elementari.
Naturalmente va affrontato anche il problema di *definire* gli oggetti dello studio in una determinata teoria; anche in questo caso appare la necessità di assumere alcuni enti come *primitivi*, ossia non definibili mediante concetti più semplici. Nel caso della Geometria, sono concetti primitivi, fra gli altri, quelli di *punto* e *retta.*
Riguardo ai *concetti primitivi*, si veda anche la risposta al Quesito 5 della Sessione Suppletiva 2001 per Corsi Sperimentali.

Uno dei più celebri tentativi di sistemazione assiomatica della Geometria è dovuto ad Euclide, con i suoi *Elementi*; in particolare ricordiamo le questioni riguardanti il "quinto postulato", equivalente all'affermazione:

per un punto esterno ad una retta r
passa una ed una sola retta parallela a r.

La minore "evidenza intuitiva" di questa proprietà rispetto ad altri assiomi ha per lungo tempo stimolato i matematici a cercare di provarla quale conseguenza degli altri assiomi euclidei. Solo in epoca relativamente recente si è giunti a provare l'indipendenza di questo assioma dagli altri; sopprimendolo, o sostituendolo con altri non equivalenti sono state create le *geometrie non euclidee.*

Una sistemazione assiomatica rigorosa della geometria venne data da David Hilbert nell'opera *Grundlagen der Geometrie* (I Fondamenti della Geometria), pubblicata nel 1901.

Per maggiori dettagli e argomenti attinenti ai *sistemi assiomatici* si veda anche: Esempio 2 di prova per Corsi Sperimentali, Quesiti 3 e 5 nel testo: P.Negrini-M.Ragagni, *Nuove prove di matematica*, Clio Edizioni, Bologna 2001.

Quesito 10

Si tratta di un quesito di tipo un po' inconsueto: la principale difficoltà consiste nel formulare in termini matematici un problema di natura "concreta". La conseguente applicazione del Teorema di Lagrange non presenta difficoltà.

Indichiamo con $s(t)$ la "legge oraria del moto": cioè $s(t)$ indica la distanza percorsa (in Km) dopo t ore dalla partenza. Indichiamo con T la durata complessiva del viaggio.
La scelta delle unità di misura (Km, ore) è suggerita dal testo, il quale esprime la velocità in $\mathrm{Km/h}$.
La legge oraria del moto è dunque una funzione $s : [0, T] \to \mathbf{R}$, che è logico supporre derivabile nel suo dominio: questo equivale a dire che in ogni istante ha senso parlare di "velocità" dell'auto in movimento (ricordiamo che la *velocità all'istante* t è, per definizione, $s'(t)$).
È $s(0) = 0$; $s(T)$ rappresenta la lunghezza complessiva del viaggio.
Il tempo impiegato per l'intero viaggio è T ore.
La velocità media è pertanto $v_m = \dfrac{s(T)}{T}\ \mathrm{km/h}$.
Il Teorema del valor medio di Lagrange afferma, nel caso attuale, che:

esiste almeno un punto $t^* \in \left]0, T\right[$ *tale che*

$$s'(t^*) = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = \frac{s(T)}{T} \quad (= v_m)$$

D'altra parte è $s'(t^*) = \textit{velocità dell'auto all'istante } t^*$.
Resta quindi provato, come si voleva, che almeno una volta durante il viaggio la velocità istantanea è uguale alla velocità media.