Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2000-2001
Sessione ordinaria

l candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1.

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

***a*)** Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

***b*)** Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x+y=4$.

***c*)** Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1,1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

***d*)** Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

***e*)** Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto ***a*)**, risulta tangente alla circonferenza k.

Problema 2.

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

***a*)** Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

***b*)** Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

***c*)** Dopo avere riferito il piano della figura, di cui al precedente punto ***b*)** ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

***d*)** Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

Questionario.

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to \ell$ per $x \to a$, essendo ℓ ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = \ell$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD' in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla formula

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
a) area massima e perimetro massimo;
b) area massima e perimetro minimo;
c) area minima e perimetro massimo;
d) area minima e perimetro minimo.
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,
a) è uguale a 0;
b) è uguale a 1;
c) è un valore diverso dai due precedenti;
d) non è determinato.
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolare il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De l'Hôpital.

Leggiamolo insieme

Problema 1

È un problema di geometria analitica, nel quale sono richiesti la determinazione e la rappresentazione grafica di una funzione omografica (iperbole equilatera) e la risoluzione di alcuni esercizi riguardanti rette e circonferenze; si tratta di esercizi standard, senza particolari difficoltà; soltanto la domanda ***e***) richiede una maggiore abilità.

Che cosa ripassare?

La funzione omografica e la sua rappresentazione grafica. Posizione reciproca di una retta e una conica; la circonferenza.

Problema 2

È un problema di geometria, nel quale la geometria analitica interviene soltanto dalla terza domanda, ove si richiede la determinazione della parabola passante per tre punti dati. Infine si deve calcolare l'area di una parte di piano; ciò si realizza mediante un integrale definito, prestando attenzione a fissare correttamente gli estremi di integrazione.

Che cosa ripassare?

Il Teorema di Talete. La similitudine. La parabola. L'uso del calcolo integrale per il calcolo di aree di regioni piane.

Soluzione del problema 1

Domanda *a*): studio della funzione.

Dalla relazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ segue, posto $x \neq 0$, $y \neq 0$, $ay+ax=xy$, da cui $y(x-a)=ax$ e infine, per $x \neq a$ $y=\frac{ax}{x-a}$; la funzione da studiare è quindi:

$$y=\frac{ax}{x-a} \quad \text{con } x \neq 0, \quad x \neq a$$

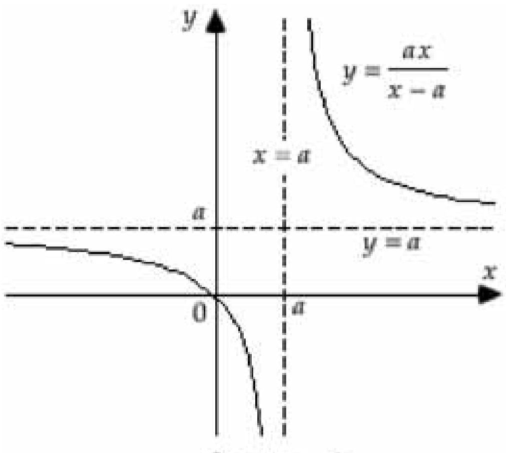

figura 1

Si tratta di una funzione omografica (cfr.3.70, 3.71, 3.72) il cui grafico è un'iperbole equi-latera riferita agli asintoti, con centro (a, a) ed asintoti $x = a,\ y = a$; per ogni valore di a la curva passa per il punto $(0, 0)$. Il suo grafico si presenta come in figura 1, nella quale il valore di a è stato scelto in modo arbitrario.

Volendo svolgere completamente lo studio della funzione $f(x) = \dfrac{ax}{x-a}$ abbiamo:

$$\text{Dominio di } f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, a\right[\cup \left]a, +\infty\right[;$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > a \ ; \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ma il punto $(0, 0)$ non appartiene al grafico di f per le condizioni imposte dal testo;

$$\lim_{x \to a^-} \frac{ax}{x-a} = -\infty; \quad \lim_{x \to a^+} \frac{ax}{x-a} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{ax}{x-a} = a; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{x-a} = a$$

e quindi le rette $x = a,\ y = a$ sono asintoti per il grafico di f;

$$f'(x) = \frac{a(x-a) - ax}{(x-a)^2} = \frac{-a^2}{(x-a)^2}; \qquad f'(x) < 0 \quad \forall\, x \neq a$$

e quindi f è decrescente in ciascun intervallo contenuto nel suo dominio (ma non in tutto il dominio).

$$f''(x) = \frac{2a^2}{(x-a)^3}, \text{ che ha segno concorde con } (x-a)$$

e quindi f è concava in $\left]-\infty, 0\right[$ e in $\left]0, a\right[$, convessa in $\left]a, +\infty\right[$.

Domanda *b*): posizione reciproca di retta e iperbole.

Poiché la curva in questione è una conica, la determinazione dei valori del parametro a per i quali essa risulta secante o tangente alla retta $x + y = 4$, può essere affrontata mediante la discussione del sistema (di secondo grado) delle due curve: $\begin{cases} x + y = 4 \\ y = \dfrac{ax}{x-a} \end{cases}$;

Tale sistema fornisce l'equazione risolvente: $x^2 - 4x + 4a = 0$, la quale ammette soluzioni reali se e solo se il suo discriminante è positivo o nullo; pertanto, essendo $\dfrac{\Delta}{4} = 4 - 4a$ risulta:

$$\boxed{t \text{ secante per } a < 1,\ t \text{ tangente per } a = 1.}$$

Domanda *c*): determinazione della circonferenza.

Il quesito risulta del tutto indipendente dal resto del problema, e si tratta di un semplice esercizio di geometria analitica inerente alla circonferenza. Proponiamo qui due risoluzioni: la prima semplice e veloce, la seconda un po' più complessa dal punto di vista dei calcoli ma, forse, preferita dalla maggior parte degli studenti.

Prima risoluzione: della circonferenza da determinare conosciamo il centro, ma non il raggio; sappiamo però la misura $(2\sqrt{2})$ della corda *AB* che essa stacca sulla retta *t*.
Questa informazione ci permette di calcolare il raggio della circonferenza. Sia *H* la proiezione di *C* sulla retta *t* (figura 2). Per un teorema di geometria, *H* è il punto medio di *AB*, quindi $\overline{HB} = \sqrt{2}$.
Applicando la formula della distanza di un punto da una retta (cfr.3.14) si ricava: $\overline{CH} = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Infine, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *CHB* si ottiene: $\overline{CB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{CH}^2} = 2$; questa è la misura del raggio della circonferenza.

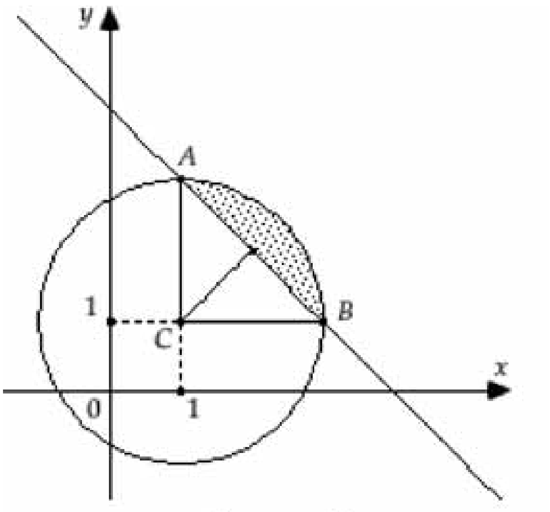

figura 2

L'equazione della circonferenza cercata è (cfr.3.22):

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

ovvero

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0}\,.$$

La figura 2 mostra la circonferenza cercata, e mette pure in evidenza una delle due regioni piane in cui la retta *t* divide il cerchio, di cui è richiesta l'area, nella successiva domanda ***d***).

Seconda risoluzione: poiché la circonferenza ha centro nel punto $(1,1)$ la sue equazione, scritta in funzione del parametro incognito *c* è (cfr.3.19, 3.20):

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + c = 0.$$

Le coordinate dei punti *A* e *B* (in funzione di *c*) si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + c = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

dal quale, ricavando la y dalla seconda equazione e sostituendola nella prima, si ottiene l'equazione di secondo grado:

$$2x^2 - 8x + c + 8 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$x_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{-2c}}{2}.$$

Naturalmente deve essere $c \le 0$, affinché le soluzioni sopra scritte siano reali.
Sostituendo nell'equazione della retta otteniamo le coordinate dei punti di intersezione:

$$A: \begin{cases} x = \dfrac{4 - \sqrt{-2c}}{2} \\ y = \dfrac{4 + \sqrt{-2c}}{2} \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x = \dfrac{4 + \sqrt{-2c}}{2} \\ y = \dfrac{4 - \sqrt{-2c}}{2} \end{cases}$$

Imponiamo ora che la distanza tra i due punti trovati sia pari a $2\sqrt{2}$; si ottiene (cfr.3.1) l'equazione:

$$\sqrt{\left(\frac{4+\sqrt{-2c}}{2} - \frac{4-\sqrt{-2c}}{2}\right)^2 + \left(\frac{4+\sqrt{-2c}}{2} - \frac{4-\sqrt{-2c}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

da cui segue, svolgendo i calcoli, $\sqrt{-4c} = 2\sqrt{2}$, ovvero $c = -2$.
Si ottiene ancora la circonferenza k di equazione:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

Domanda *d*): calcolo delle aree.

Le coordinate dei punti A e B di intersezione della retta con la circonferenza trovata sono (sostituendo $c = -2$ nel sistema precedente o intersecando direttamente retta e circonferenza): $A(1,3)$ e $B(3,1)$. Poiché il centro C della circonferenza ha coordinate $C(1,1)$, le rette CA e CB risultano, rispettivamente, parallele all'asse delle ordinate e all'asse delle ascisse e quindi tra loro perpendicolari. Pertanto l'angolo $A\hat{C}B$ è retto. Il calcolo dell'area dei due segmenti circolari delimitati da k e dalla retta t (figura 2) può essere allora svolto semplicemente per via geometrica; del tutto inopportuna appare invece la via analitica, con applicazione del calcolo integrale.

L'area del settore circolare delimitato dall'angolo $A\hat{C}B$ è la quarta parte dell'area del cerchio delimitata da k, ovvero, poiché il raggio di k è 2, $\frac{1}{4}\cdot 4\pi = \pi$; l'area del minore dei segmenti circolari si ottiene sottraendo dall'area del settore l'area del triangolo ACB; quindi la minore delle aree richieste è

$$\pi - \frac{1}{2}2\cdot 2 \;\; = \;\; \pi - 2\,.$$

La parte rimanente misura $4\pi - (\pi - 2) = 3\pi + 2$.

$$\boxed{\textit{Misura delle aree richieste:}\quad \pi - 2 \quad ; \qquad 3\,\pi + 2}$$

Domanda *e*): iperbole tangente alla circonferenza.

La tangenza tra una circonferenza e un'iperbole non può essere imposta per via algebrica, perché il sistema delle due equazioni è di quarto grado, difficilmente trattabile con metodi di algebra elementare. In effetti, come si può osservare nelle figure 3, 4 e 5, k e le iperboli del fascio si intersecano sempre in due punti reali, mentre le altre due intersezioni possono essere: reali e distinte (e le due coniche si intersecano in quattro punti), reali e coincidenti (e le due coniche sono tangenti in un punto e si tagliano in altri due), complesse coniugate (e le due coniche si intersecano solo in due punti).

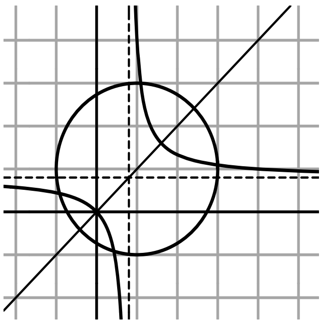

figura 3

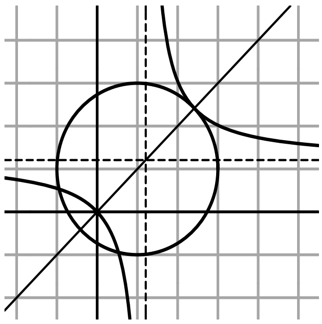

figura 4

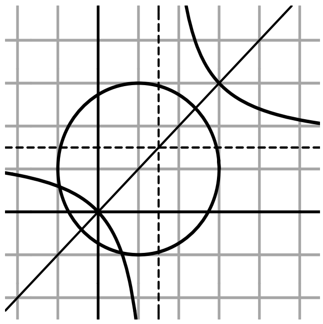

figura 5

Procediamo quindi con un ragionamento geometrico, dimostrando innanzi tutto che entrambe le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il centro della circonferenza appartiene alla retta $y = x$ e quindi k ha tale retta come asse di simmetria (ogni diametro è asse di simmetria per una circonferenza).

Tutte le iperboli del fascio rappresentato da $y = \frac{ax}{x - a}$ hanno il centro sulla retta $y = x$, la quale è anche l'asse trasverso (o asse focale) delle iperboli; ciò è sufficiente per affermare la simmetria di tali curve rispetto a $y = x$.

Per maggiore chiarezza svolgiamo la verifica della simmetria anche per via algebrica.
La simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$ (cfr.3.81) e la sua inversa hanno rispettivamente equazioni

$$\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$$

(in effetti, trattandosi di una simmetria assiale, la trasformazione e la sua inversa coincidono).

Sostituendo nell'equazione delle iperboli si ha: $X = \dfrac{a\,Y}{Y - a}$ da cui $XY - aX = aY$ e dunque: $Y = \dfrac{a\,X}{X - a}$.

Poiché l'equazione della curva trasformata coincide, per ogni valore di *a*, con quella della curva di partenza, tutte le iperboli del fascio sono simmetriche rispetto a $y = x$.

Come conseguenza di ciò, tutti i punti di intersezione delle iperboli con la circonferenza k devono essere a due a due simmetrici rispetto a $y = x$; se due di questi punti devono coincidere (affinché le curve siano tangenti), essi dovranno appartenere all'asse di simmetria, cioè a $y = x$. Basandoci su questa osservazione calcoliamo i punti di intersezione di k con la bisettrice; si ha:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è $x^2 - 2x - 1 = 0$ che fornisce:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,.$$

I punti di intersezione tra le due curve hanno coordinate: $\left(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right)$ e $\left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$. Scartiamo il primo di questi punti perché appartiene al terzo quadrante e imponiamo invece che l'iperbole di equazione $y = \dfrac{ax}{x - a}$ passi per secondo punto; si ottiene:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{a\left(1 + \sqrt{2}\right)}{1 + \sqrt{2} - a} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2} - a\right) = a\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$\text{da cui } \ 2a = 1 + \sqrt{2} \ \text{ ovvero } a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\textit{L'iperbole è tangente alla circonferenza } k \ \textit{ per } a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$$

Soluzione del problema 2.

domanda *a*): $DENM$ è la quarta parte di ABC.

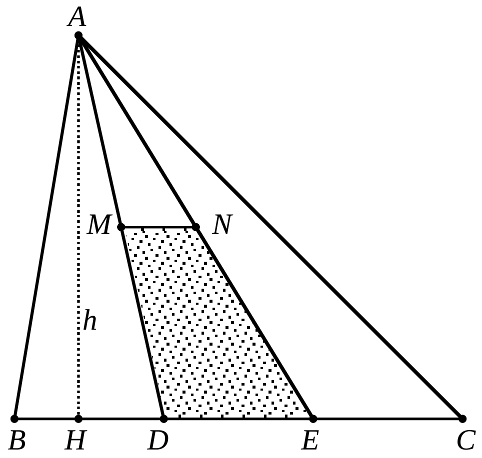

figura 6

Il segmento congiungente i punti medi M e N dei lati AD, AE del triangolo ADE è, per una conseguenza del Teorema di Talete (cfr.2.22), parallelo al lato DE. Dunque $DENM$ è un trapezio.
Inoltre

$$\overline{MN} = \tfrac{1}{2}\overline{DE} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\overline{BC} = \tfrac{1}{6}\overline{BC}\,.$$

L'altezza del trapezio è la metà dell'altezza h di ABC e di ADE. infatti il triangolo AMN è simile a ADE, con rapporto di similitudine $\frac{1}{2}$; l'altezza di ADE è perciò $\frac{1}{2}h$ e quindi, per differenza, anche l'altezza del trapezio è $\frac{1}{2}h$. Allora

$$Area\,DENM = \frac{1}{2}\left(\overline{DE}+\overline{MN}\right)\cdot\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{BC}+\frac{1}{6}\overline{BC}\right)\cdot\frac{1}{2}h = \frac{1}{8}\overline{BC}\cdot h$$

mentre è

$$Area\,ABC = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot h\,.$$

Si osserva che l'area del trapezio è la quarta parte dell'area del triangolo, come si voleva dimostrare.

Il ragionamento può anche essere condotto in maniera leggermente diversa, senza fare riferimento alla formula per l'area di un trapezio. A causa della similitudine dei triangoli AMN, ADE con rapporto di similitudine $\frac{1}{2}$, l'area di AMN è $\frac{1}{4}$ dell'area di ADE; perciò l'area di $DENM$ è $\frac{3}{4}$ dell'area di ADE.

Quest'ultima è $\frac{1}{3}$ dell'area di ABC perché i tre triangoli ABD, ADE, AEC sono equivalenti, avendo uguali basi ed altezze. Pertanto

$$Area\,DENM = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}Area\;ABC = \frac{1}{4}Area\;ABC\,.$$

domanda *b*): il trapezio $DENM$ (con le misure date) è rettangolo.

Conoscendo la misura di $\overline{BC} = 15a$ e l'area del triangolo, possiamo calcolare l'altezza relativa a BC. Ragioniamo sulla figura 6. L'area del triangolo, come abbiamo dimostrato per la domanda ***a*)**, è quadrupla dell'area del trapezio *DENM*; quindi attualmente vale $4 \cdot \frac{45}{2}a^2 = 90a^2$. Perciò

$$\overline{AH} = \frac{2\ Area\ ABC}{\overline{BC}} = \frac{180a^2}{15a} = 12a.$$

Per mezzo del Teorema di Pitagora possiamo calcolare la misura di *BH*:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} =$$
$$= \sqrt{169a^2 - 144a^2} = \sqrt{25a^2} = 5a.$$

Dunque $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, e quindi $H \equiv D$. Perciò è $AD \perp BC$ (e di conseguenza è anche $AD \perp MN$). Dunque *DEMN* è un trapezio rettangolo, con gli angoli retti in *D* e *M* (figura 7).

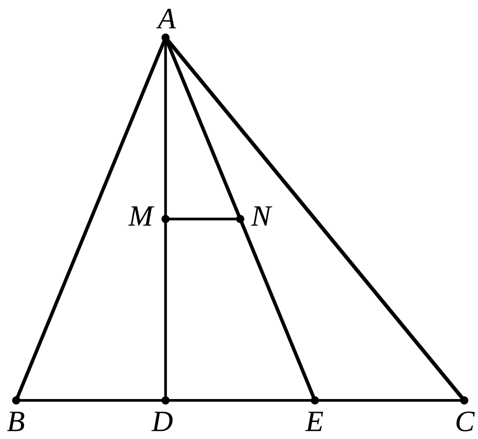

figura 7

domanda *c*): determinazione della parabola passante per *C*, *M*, *N*.

Scegliamo il sistema di riferimento in modo che *C* sia l'origine e l'asse delle ascisse contenga *BC*. L'orientamento del disegno come nelle figure 7 e 8 porta come conseguenza che *B*, *M*, *N* hanno ascisse negative, orientando gli assi nel modo consueto.
Precisamente, le coordinate di *C*, *M*, *N* sono

$$C(0,0)\ ,\quad M(-10a\ ,6a)\ ,\quad N\left(-\frac{15}{2}a\ ,6a\right)$$

L'equazione della parabola con asse perpendicolare alla retta *BC* (cioè, all'asse *x*) e passante per *M*, *N*, *C* è della forma:

(1) $$y = px^2 + qx$$

In questo modo abbiamo già tenuto conto del passaggio per l'origine, ossia per *C*, assumendo che il termine noto sia nullo.
Abbiamo usato per i coefficienti dell'equazione le lettere *p* e *q* anziché i più consueti *a* e *b*, per non creare confusione con la lettera *a*, qui utilizzata ad indicare una unità di misura.
Imponiamo alla (1) di essere soddisfatta dalle coordinate di *M* e *N*:

(2) $$\begin{cases} 6a = 100a^2p - 10aq \\ 6a = \frac{225}{4}a^2p - \frac{15}{2}aq \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6 = 100ap - 10q \\ 6 = \frac{225}{4}ap - \frac{15}{2}q \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni di primo grado nelle incognite p e q. Sottraendo membro a membro otteniamo

(3) $$\frac{175}{4}a\,p-\frac{5}{2}q=0\ ;\quad q=\frac{35}{2}a\,p.$$

Sostituendo questa espressione di q nella prima equazione di (2) troviamo

$$6=100\,a\,p-175a\,p\ ;\quad 75a\,p=-6\ ;\quad p=\frac{6}{75a}=-\frac{2}{25a}$$

e allora dalla seconda di (3)

$$q=\frac{35}{2}a\cdot\left(-\frac{2}{25a}\right)=-\frac{7}{5}.$$

Abbiamo così ottenuto (relativamente al sistema di riferimento da noi scelto)

Equazione della parabola per C, M, N: $y=-\frac{2}{25a}x^2-\frac{7}{5}x$

Osserviamo che una diversa scelta del sistema di riferimento avrebbe dato luogo a una differente equazione della parabola.

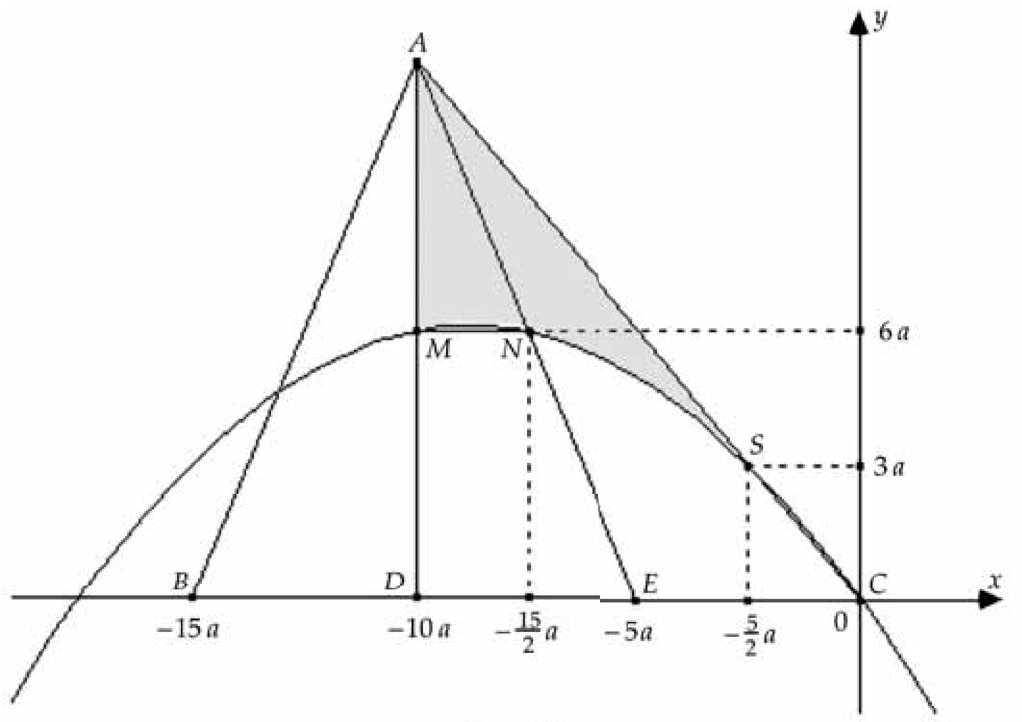

figura 8

domanda *d*): calcolo delle aree.

Occorre fare attenzione alla figura, osservando che la parabola interseca il segmento AC in un ulteriore punto S interno al

segmento, oltre che nell'estremo C. Ciò risulterà evidente svolgendo i calcoli; una figura disegnata approssimativamente potrebbe però trarre in inganno.
L'equazione della retta AC, tenendo conto che le coordinate di A e C sono $C(0,0)$, $A(-10a, 12a)$ è

(4) $$y = -\frac{6}{5}x.$$

Risolvendo il sistema fra questa equazione e quella della parabola otteniamo

$$-\frac{6}{5}x = -\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x \ ; \quad 5ax + 2x^2 = 0 \ ; \quad x = \begin{cases} 0 \\ -\frac{5}{2}a \end{cases}$$

da cui, sostituendo i valori di x nella (4), otteniamo le coordinate dei punti

$$C(0,0) \ , \qquad S\left(-\frac{5}{2}a, 3a\right)$$

L'area della parte del triangolo ADC che si trova sopra alla parabola (tratteggiata nella figura 8) si calcola facilmente mediante un integrale:

$$Area = \int_{-10a}^{-\frac{5}{2}a} \left[-\frac{6}{5}x - \left(-\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x\right)\right] dx = \int_{-10a}^{-\frac{5}{2}a} \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{25a}x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{75a}x^3\right]_{-10a}^{-\frac{5}{2}a} = \frac{5}{24}a^2 + \frac{50}{3}a^2 = \frac{405}{24}a^2 = \frac{135}{8}a^2$$

L'area della parte inferiore si calcola per differenza dall'area del triangolo; quest'ultima è

$$Area\,ADC = \frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot 10a \cdot 12a = 48a^2$$

cosicché l'area della parte inferiore è

$$60a^2 - \frac{135}{8}a^2 = \frac{345}{8}a^2$$

Aree delle due parti in cui la parabola divide il triangolo ADC:

$$\frac{135}{8}a^2 \quad ; \qquad \frac{345}{8}a^2$$

Questionario

Quesito 1

Si chiede di discutere la relazione fra il valore di una funzione in un punto del suo dominio ed il limite di questa nel medesimo punto. L'oggetto della domanda è, in sostanza, la definizione di continuità di una funzione in un punto.

Per definizione, una funzione f si dice continua in a, punto non isolato del suo dominio, se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

L'ipotesi assegnata, $\lim_{x\to a} f(x) = l$, <u>non</u> assicura che sia $l = f(a)$, per diverse ragioni:

1) Potrebbe non esistere $f(a)$, ossia a potrebbe essere un punto di accumulazione per il dominio di f, non appartenente al dominio stesso.

Per esempio, sia $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Come è noto (cfr.5.7) risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (abbiamo quindi in questo esempio $a = 0$, $l = 1$).

<u>Non è vero</u> che $l = f(a)$, cioè $1 = f(0)$, perché $f(0)$ non esiste.

2) Possono esistere sia $f(a)$, sia $\lim_{x\to a} f(x) = l$, ma essere $l \neq f(a)$; è il caso in cui si dice che f ha nel punto a una *discontinuità eliminabile*.

Un esempio in tal senso può essere facilmente costruito modificando di poco l'esempio precedente: definiamo questa volta

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad ; \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Attualmente risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, cioè come prima $a = 0$, $l = 1$, ma $f(a) = 0 \neq l$.

Naturalmente, in questo esempio la scelta di porre $f(0) = 0$ è arbitraria: saremmo giunti alla stessa conclusione assegnando a $f(0)$ un qualunque valore diverso da 1.

Quesito 2

È un quesito di carattere teorico in cui occorre principalmente una buona conoscenza dei teoremi sugli integrali: il teorema fondamentale del calcolo integrale, oppure il teorema della media integrale; utilizzando uno di questi strumenti, il risultato si ottiene con calcoli semplicissimi.

1° metodo: applicazione del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale e del Teorema di De l'Hôpital.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale afferma che:

Se f è una funzione continua definita in un intervallo I, e $a \in I$, allora la <u>funzione integrale</u> $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è derivabile in ogni punto di I, ed è $F'(x) = f(x)$.

La funzione integrale è (ovviamente) anche continua; in particolare $\lim_{x \to a} F(x) = F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$, essendo quest'ultimo un integrale calcolato in un intervallo di lunghezza nulla.
Nel caso del problema proposto è $a = 0$; le funzioni al numeratore e al denominatore hanno entrambe limite 0 per $x \to 0$ e soddisfano i requisiti occorrenti per calcolare il limite per mezzo della regola di De l'Hôpital (si veda, a tale proposito, la soluzione del quesito 10 in questo stesso tema). Abbiamo perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{2xe^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\, dt}{\frac{d}{dx}\left(2xe^x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2e^x + 2xe^x} = \frac{2}{2} = 1$$

tenendo presente l'ipotesi $f(0) = 2$. Quindi il limite cercato vale 1.

2° metodo: applicazione del Teorema della Media Integrale.

Il Teorema della Media Integrale afferma che:

Se f è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$, allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(t)\, dt = f(c) \cdot (b - a)$.

Possiamo applicare detto Teorema al numeratore della frazione di cui è richiesto il calcolo del limite; attualmente come *a* e *b* abbiamo 0 e *x*. Esiste allora un c compreso fra 0 e x tale che

$$\int_0^x f(t)\, dt = f(c) \cdot (x - 0) = x \cdot f(c).$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{2xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot f(c)}{2xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(c)}{2e^x}.$$

Poiché c è compreso fra 0 e x, quando $x \to 0$ anche $c \to 0$, e perciò $\lim\limits_{x\to 0} f(c) = 2$, per l'ipotesi data dal testo.

Dunque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(c)}{2e^x} = \dfrac{2}{2\cdot e^0} = 1$; abbiamo così ritrovato il risultato già ottenuto con il primo metodo.

Quesito 3

È un quesito soltanto apparentemente di geometria solida; la risoluzione avviene ragionando sulla faccia $ABCD$ del cubo, con argomenti di geometria piana. Esponiamo tre possibili risoluzioni, la prima basata sulla similitudine di triangoli, la seconda svolta con l'ausilio della geometria analitica e l'ultima con l'ausilio della trigonometria.

Poiché i due piani con i quali viene sezionato il cubo sono perpendicolari alla faccia $ABCD$, le "parti" in cui essi dividono il cubo sono prismi retti; per ciascuno di questi prismi, l'altezza è uguale allo spigolo ℓ del cubo; perciò i volumi sono proporzionali alle rispettive aree di base.
Il problema equivale quindi al seguente:

dimostrare che l'area della parte più estesa in cui i segmenti AC e DE dividono il quadrato $ABCD$ è il quintuplo dell'area della parte meno estesa.

1. Risoluzione con metodo geometrico.

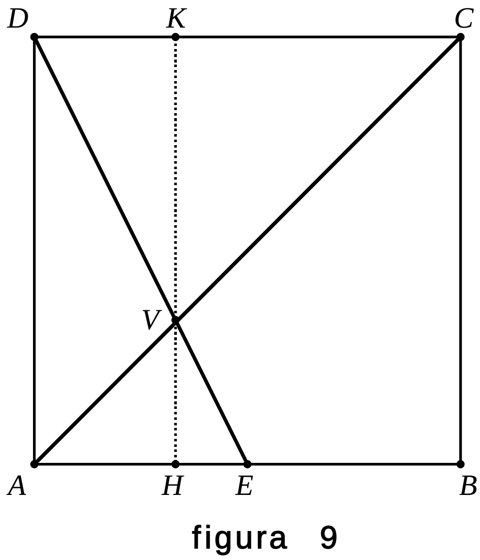

figura 9

Sia V il punto di intersezione di AC e DE (figura 9); siano H e K le proiezioni ortogonali di V rispettivamente su AB e CD.
I triangoli AEV e CDV sono simili, perché hanno i tre angoli a due a due congruenti. Il rapporto di similitudine è $\frac{1}{2}$, perché per costruzione $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Tale rapporto vale quindi per le altezze VH e VK dei due triangoli:

(1) $$\overline{VH} = \frac{1}{2}\overline{VK}.$$

Indicata con ℓ la lunghezza dello spigolo del cubo, ossia del lato del quadrato $ABCD$, si ha anche

(2) $$\overline{VH} + \overline{VK} = \ell$$

Sostituendo in (2) l'espressione di $\overline{VH}$ data in (1) abbiamo

$$\frac{1}{2}\overline{VK}+\overline{VK}=\ell\ ;\quad \frac{3}{2}\overline{VK}=\ell\ ;\quad \overline{VK}=\frac{2}{3}\ell \text{ e quindi } \overline{VH}=\frac{1}{3}\ell .$$

Abbiamo ora tutti gli elementi per calcolare le aree delle quattro parti in cui *AC* e *DE* dividono *ABCD*.

$$Area\,AEV \ = \ \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{VH} \ = \ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ell\cdot\frac{1}{3}\ell \ = \ \frac{1}{12}\ell^2$$

$$Area\,BCVE \ = \ Area\ ABC - Area\ BCVE \ = \ \frac{1}{2}\ell^2-\frac{1}{12}\ell^2 \ = \ \frac{5}{12}\ell^2$$

Sono queste le due regioni di area minima e massima in cui *AC* e *DE* dividono il quadrato; in effetti l'area maggiore è cinque volte l'area minore, come si voleva dimostrare.
Come controllo, calcoliamo le aree delle altre due regioni.

$$Area\,CDV \ = \ \frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{VK} \ = \ \frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell \ = \ \frac{1}{3}\ell^2$$

$$Area\,ADV \ = \ Area\ ADC - Area\ CDV \ = \ \frac{1}{2}\ell^2-\frac{1}{3}\ell^2 \ = \ \frac{1}{6}\ell^2$$

entrambe intermedie fra i valori calcolati precedentemente.

2. Risoluzione con la geometria analitica.

Introduciamo un "conveniente" sistema di riferimento: per esempio, poniamo l'origine nel punto *A*, l'asse delle ascisse lungo *AB* e l'asse delle ordinate lungo *AC*. Così risulta

$$A\left(0,0\right);\ B\left(\ell,0\right);$$
$$E\left(\frac{1}{2}\ell,0\right);\ C\left(\ell,\ell\right);$$
$$D\left(0,\ell\right).$$

L'equazione della retta *AB* è $y=x$; l'equazione della retta *DE* è $2x+y=\ell$.

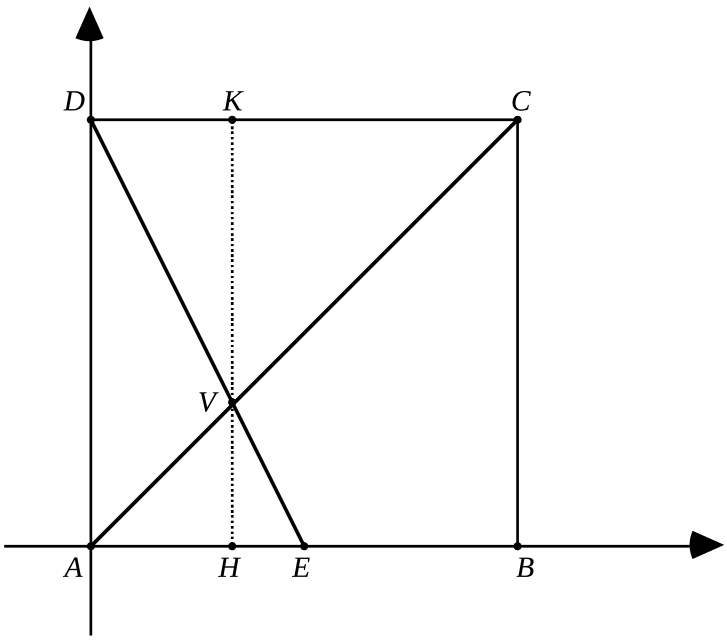

figura 10

Le coordinate di *V* si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + y = \ell \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = x \\ 3x = \ell \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}\ell \\ y = \frac{1}{3}\ell \end{cases} \quad \text{e quindi } V\left(\frac{1}{3}\ell, \frac{1}{3}\ell\right)$$

Segue che $\overline{VH} = \frac{1}{3}\ell$; da qui si procede come nel caso precedente.

3. Risoluzione trigonometrica.

Proponiamoci nuovamente di calcolare l'area del triangolo AEV. Questa volta utilizziamo gli strumenti forniti dalla trigonometria; il metodo è un po' artificioso, ma comunque efficace.

Sappiamo che $\overline{AD} = \ell$, $\overline{AE} = \frac{\ell}{2}$, $V\hat{A}E = \frac{\pi}{4}$; inoltre, per i teoremi sui triangoli rettangoli si ha (cfr. 4.46): $\overline{AD} = \overline{AE} \cdot \mathrm{tg}\left(V\hat{E}A\right)$ da cui

$$\mathrm{tg}\left(V\hat{E}A\right) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = 2.$$

Segue allora (cfr.4.12):

$$\mathrm{sen}\left(V\hat{E}A\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cos\left(V\hat{E}A\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Applicando il teorema dei seni (cfr. 4.49) al triangolo VEA risulta: $\overline{AV} = \dfrac{\overline{AE} \cdot \mathrm{sen}\left(V\hat{E}A\right)}{\mathrm{sen}\left(A\hat{V}E\right)}$; inoltre è $A\hat{V}E = \frac{3}{4}\pi - V\hat{E}A$, e quindi $\mathrm{sen}\left(A\hat{V}E\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (cfr.4.31) e quindi: $\overline{AV} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \ell}{3}$.

Allora (cfr.4.51):

$$Area(AEV) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AV} \cdot \mathrm{sen}\left(V\hat{A}E\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \ell}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{12}\ell^2.$$

Poiché $Area(ABC) = \frac{1}{2}\ell^2$, risulta per differenza $Area(VEBC) = \frac{5}{12}\ell^2$; dunque $Area(VEBC) = 5\,Area(AEV)$ come si voleva dimostrare.

Quesito 4

Si deve dimostrare la formula che esprime l'area di un tronco di piramide, note le aree delle due basi e l'altezza. La dimostrazione che proponiamo assume per nota la formula per il volume di una piramide; lo svolgimento richiede una certa attenzione.

La figura 11 mostra un tronco di piramide (completato in una piramide) con base triangolare; come si vedrà, quest'ultimo particolare (la base triangolare) non ha alcun rilievo nella dimostrazione; accanto, il dettaglio del triangolo AKV, in cui K è il piede dell'altezza della piramide.

Prolunghiamo come in figura gli spigoli laterali del tronco di piramide dalla parte della base minore, fino a farli convergere nel

vertice V di una piramide della quale il tronco è una porzione. Sia $H = \overline{VK}$ l'altezza dell'intera piramide così ottenuta; l'altezza della piramide più piccola, avente per base la base minore del tronco, è allora $\overline{KK'} = H - h$.
Vogliamo calcolare H in funzione di B, b, e h; quando avremo fatto ciò, calcoleremo il volume del tronco di piramide come differenza fra i volumi delle due piramidi.

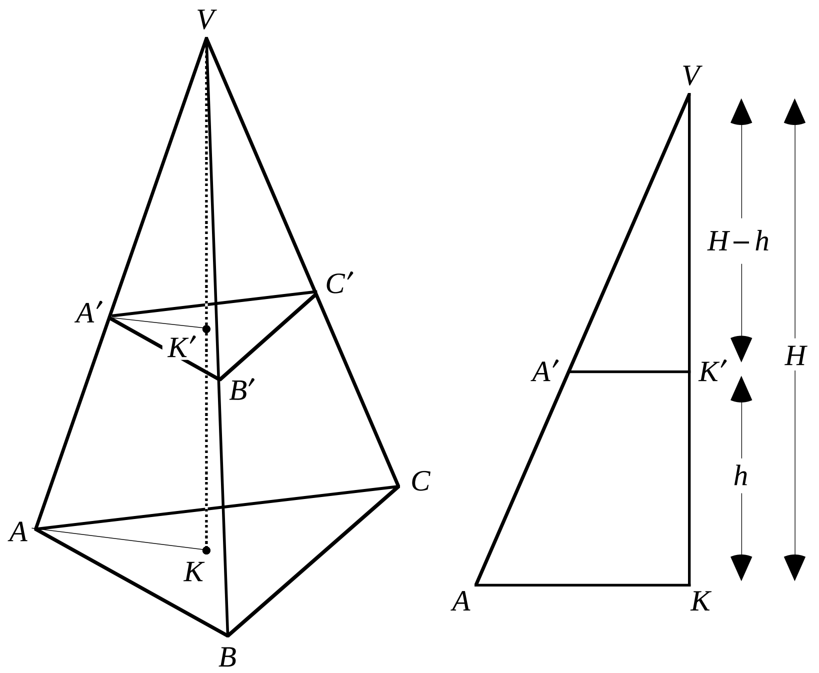

figura 11

Per la similitudine fra i triangoli VAK e $VA'K'$ si ha che

(1) $\quad VK' : VK = A'K' : AK \quad$ cioè $\quad (H-h) : H = \overline{A'K'} : \overline{AK}$

$\overline{A'K'}$ e $\overline{AK}$ sono misure lineari corrispondenti, relative alla base minore e alla base maggiore del tronco di piramide. Il rapporto fra le aree di due figure simili è uguale al <u>quadrato</u> del rapporto di similitudine; perciò quest'ultimo è uguale alla <u>radice quadrata</u> del rapporto fra le aree:

$$\overline{A'K'} : \overline{AK} = \sqrt{\frac{b}{B}}$$

cosicché per (1)

(2) $$\frac{H-h}{H} = \sqrt{\frac{b}{B}}\ ; \quad H\left(1-\sqrt{\frac{b}{B}}\right) = h\ ; \quad H = \frac{h}{1-\sqrt{\frac{b}{B}}} = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

Adesso calcoliamo il volume del tronco di piramide, differenza fra i volumi delle due piramidi.
Ricordiamo che il volume di una piramide è (cfr.2.46)

$$Volume\ piramide \ = \ \frac{1}{3}\left(Area\ di\ base \times altezza\right)$$

Perciò, tenendo presente quanto ottenuto in (2),

$$Volume\ tronco = \frac{1}{3}\left[B \cdot H - b \cdot (H-h)\right] = \frac{1}{3}\left[H(B-b) + bh\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}(B-b) + bh\right] = \frac{1}{3}h\left(\sqrt{B}\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)+b\right) = \frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{Bb}\right)$$

come si voleva dimostrare.

Quesito 5

Si chiede la dimostrazione di un Teorema sul calcolo differenziale, conseguenza del Teorema di Lagrange del valor medio. Si faccia attenzione a non invertire l'ipotesi con la tesi, provando (proprietà assai più banale) che "se una funzione è costante, allora la sua derivata è nulla in ogni punto".

Sia $x \in [a, b]$. La funzione f soddisfa nell'intervallo $[a, x]$ le ipotesi del Teorema di Lagrange del valor medio. Per detto Teorema, esiste un $c \in]a, x[$ tale che $f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x-a)$.
Ma per ipotesi risulta $f'(c) = 0$, e quindi $f(x) - f(a) = 0$, cioè $f(x) = f(a)$.
La funzione f assume quindi in ogni punto dell'intervallo $[a, b]$ lo stesso valore che assume in a, ossia è costante in tale intervallo, come si voleva dimostrare.

Quesito 6

Si chiede la dimostrazione di una identità riguardante i coefficienti binomiali, spesso ricordata come "formula di Stifel". Si tratta della proprietà che è alla base della regola di formazione del cosiddetto "triangolo di Tartaglia".

Se p, q sono numeri naturali, $0 \le p \le q$, si pone (cfr.1.20)

$$(1) \qquad \binom{p}{q} = \frac{p!}{q!\,(p-q)!}$$

Conviene qui scrivere la formula utilizzando lettere diverse da n e k, per non creare confusione con il ruolo che n e k hanno nella formula che dobbiamo dimostrare.
Per dimostrare l'uguaglianza

$$(2) \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

sviluppiamo separatamente le espressioni del primo e del secondo membro; la dimostrazione consisterà semplicemente nell'osservare che i risultati ottenuti nei due casi coincideranno.

Ponendo in (1) $p = n$, $q = k$ otteniamo

(3) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Passiamo al secondo membro di (2). Ponendo in (1) $p = n-1$, $q = k$ si ottiene

(4) $$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}.$$

Ponendo in (1) $p = n-1$, $q = k-1$ si ottiene

(5) $$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Per calcolare la somma dei risultati ottenuti in (4) e (5) occorre, quale denominatore comune, un multiplo comune dei due denominatori (osserviamo che non è essenziale che sia il *minimo* comune multiplo).

Ebbene, si osserva che $k!$ è un multiplo di $(k-1)!$: infatti

$$k! = (k-1)! \cdot k;$$

allo stesso modo, $(n-k)!$ è un multiplo di $(n-k-1)!$, poiché è

$$(n-k)! = (n-k-1)! \cdot (n-k)$$

Allora la somma dei risultati di (4) e (5) è

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Come si nota, il risultato è lo stesso ottenuto in (3). Ciò conclude la dimostrazione.

La dimostrazione può essere svolta anche in altro modo, facendo riferimento al "significato combinatorio" del coefficiente binomiale: $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi con k elementi, di un insieme che ha n elementi.

Ebbene, immaginiamo di contrassegnare un particolare elemento dell'insieme I che ne ha k: chiamiamolo a.

Un sottoinsieme di I (con k elementi) può contenere a oppure non contenerlo.

Quanti sono i sottoinsiemi di A che hanno k elementi, fra i quali non c'è a?
Sono, evidentemente, i sottoinsiemi con k elementi di $A-\{a\}$, il quale ha $n-1$ elementi. Il numero di questi sottoinsiemi è pertanto $\binom{n-1}{k}$.
Quanti sono i sottoinsiemi di A che hanno k elementi, fra i quali c'è a?
Ciascuno di tali sottoinsiemi può essere ottenuto prendendo un sottoinsieme con $k-1$ elementi di $A-\{a\}$, ed aggiungendogli l'elemento a. Il numero di tali sottoinsiemi è dunque uguale al numero dei sottoinsiemi con $k-1$ elementi di $A-\{a\}$: $\binom{n-1}{k-1}$.
Addizionando il numero dei sottoinsiemi di A con k elementi, comprendenti a ed il numero dei sottoinsiemi di A con k elementi, non comprendenti a otterremo il numero complessivo dei sottoinsiemi di A con k elementi: dunque $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$, come si voleva dimostrare.

Quesito 7

È un problema di massimo e minimo relativo ad un triangolo inscritto in un semicerchio; il problema è del tipo "a risposta chiusa", ma la richiesta di giustificare la risposta scelta rende in pratica trascurabile questa caratteristica del quesito.

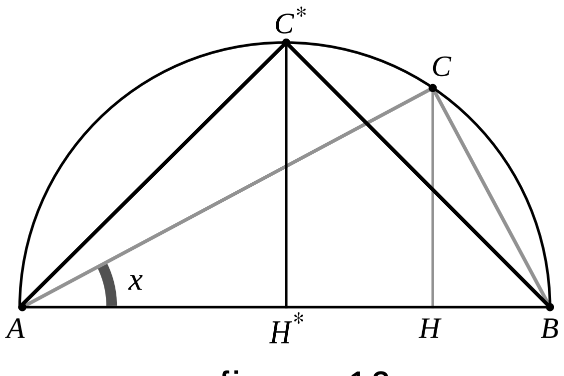

figura 12

I triangoli inscritti nella semicirconferenza di diametro AB hanno come altezza relativa ad AB un segmento CH la cui lunghezza è minore o uguale a quella del raggio. L'altezza massima si realizza quando C è nel punto medio C^* della semicirconferenza, ossia quando il triangolo è isoscele: quest'ultimo è dunque il triangolo di area massima inscritto nella semicirconferenza (figura 12).
Per quanto riguarda il perimetro, la "soluzione sintetica" è un po' meno immediata. Si può procedere nel modo seguente:
Osserviamo prima di tutto che il lato AB resta fisso; rendere massimo il perimetro equivale a rendere massima la somma $\overline{AC}+\overline{BC}$.

Prolunghiamo AC oltre C di un segmento $CD = BC$ (figura 13). Si tratta quindi di scegliere C in modo che AD abbia la massima lunghezza.
Vediamo quale è il luogo in cui varia il punto D.
Il triangolo BCD è per costruzione isoscele, perché $CD = BC$. Esso è pure rettangolo, perché $BC \perp AD$.

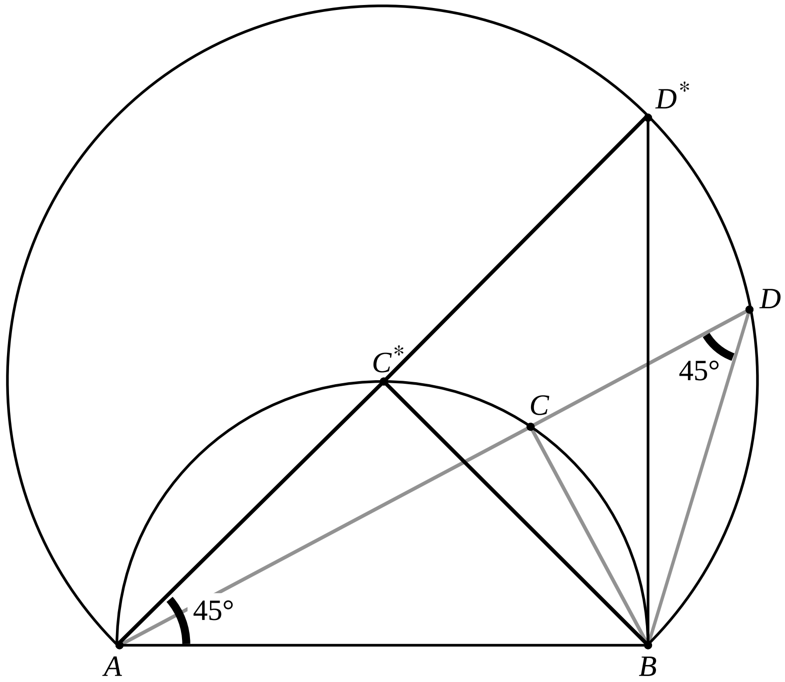

figura 13

Perciò l'angolo $A\hat{D}B$ ha misura costante di 45°. Il luogo di D è pertanto l'arco di base AB capace di un angolo di 45°, situato dalla stessa parte di AB in cui si trova la semicirconferenza.
Il segmento AD è una corda di tale arco. Tale corda è massima quando è un diametro (AD^*, in figura). In tal caso l'angolo $A\hat{B}D^*$ è retto, perché insiste su un diametro; allora anche l'angolo in A (oltre a quello in D^*) misura 45°.
Perciò il punto di intersezione di AD^* con la semicirconferenza di diametro AB è il punto medio C^* della semicirconferenza. Ciò significa che il triangolo di perimetro massimo, inscritto nella semicirconferenza, è ancora quello isoscele.

La risposta esatta al quesito è quindi la (*a*).

La determinazione del triangolo di perimetro massimo può naturalmente essere svolta anche con metodi di analisi.
Per esempio, sia x la misura in radianti dell'angolo $A\hat{B}C$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.
Indicato con r il raggio della semicirconferenza, si ha

$$\overline{AC} = r\,\text{sen}\,x\,;\overline{BC} = r\cos x \text{ e quindi } \overline{AC} + \overline{BC} = r\left(\text{sen}\,x + \cos x\right) \equiv f(x).$$

Risulta $f'(x) = r(\cos x - \operatorname{sen} x)$; con facili calcoli si vede che il segno di $f'(x)$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ varia come indicato nel seguente schema, con le conseguenze ivi riportate sulla monotonia di *f*.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
f' & \bullet & ++++++++++++ & \bullet & ------------ & \bullet \\
 & 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{2} \\
f & & \nearrow & & \searrow &
\end{array}
$$

Il massimo di f si realizza dunque per $x = \frac{\pi}{4}$, vale a dire quando il triangolo ABC è isoscele, come avevamo già visto.

Quesito 8

Il quesito riguarda l'esistenza o non esistenza di estremanti per un polinomio di grado tre dipendente da un parametro.
La risoluzione consiste nel discutere il segno della derivata; ciò non comporta difficoltà, essendo tale derivata un polinomio di grado due.

Da $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ segue

(1) $$f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$$

La funzione f ha degli estremanti solo nel caso in cui $f'(x)$ <u>non ha segno costante</u>. Ciò avviene se e solo se il discriminante di (1) è strettamente positivo $(\text{cioè } \Delta > 0)$. Risulta

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a = 4a\left(a + \frac{9}{4}\right)$$

Il segno di Δ varia in funzione di a come indicato nel seguente schema:

$$
\begin{array}{ccccc}
++++++++++ & \bullet & - \; - \; - \; - \; - \; - & \bullet & ++++++++++ \\
 & -\frac{9}{4} & & 0 &
\end{array}
$$

Perciò:

- *Se* $a < -\frac{9}{4}$ *oppure* $a > 0$, allora ci sono due estremanti per *f*.
- *Se* $-\frac{9}{4} \le a \le 0$ allora non ci sono estremanti per *f*.

Osserviamo esplicitamente che anche nel caso-limite $a = -\frac{9}{4}$ la funzione f non ha estremanti: la derivata si annulla in *un solo punto*, ma è altrove di segno costante (negativo): tale punto è quindi un punto di flesso con tangente orizzontale.
Svolgiamo in dettaglio il calcolo relativo a questo caso particolare.
Se $a = -\frac{9}{4}$ risulta

$$f(x) = -\frac{9}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 3x \quad , \qquad f'(x) = -\frac{27}{4}x^2 - 9x - 3 = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

e quindi $f'(x)$ si annulla soltanto per $x=-\frac{3}{2}$, ed è negativa per ogni altro valore di x. Dunque, anche quando $a=-\frac{9}{4}$, f non ha estremanti: $x=-\frac{3}{2}$ è l'ascissa di un flesso con tangente verticale.
La figura 14 mostra, in un sistema di riferimento non monometrico, i grafici delle funzioni f per alcuni valori di a. È stata tracciata anche la retta $y=-3x$ che risulta assegnando ad a il valore 0, escluso dal testo.

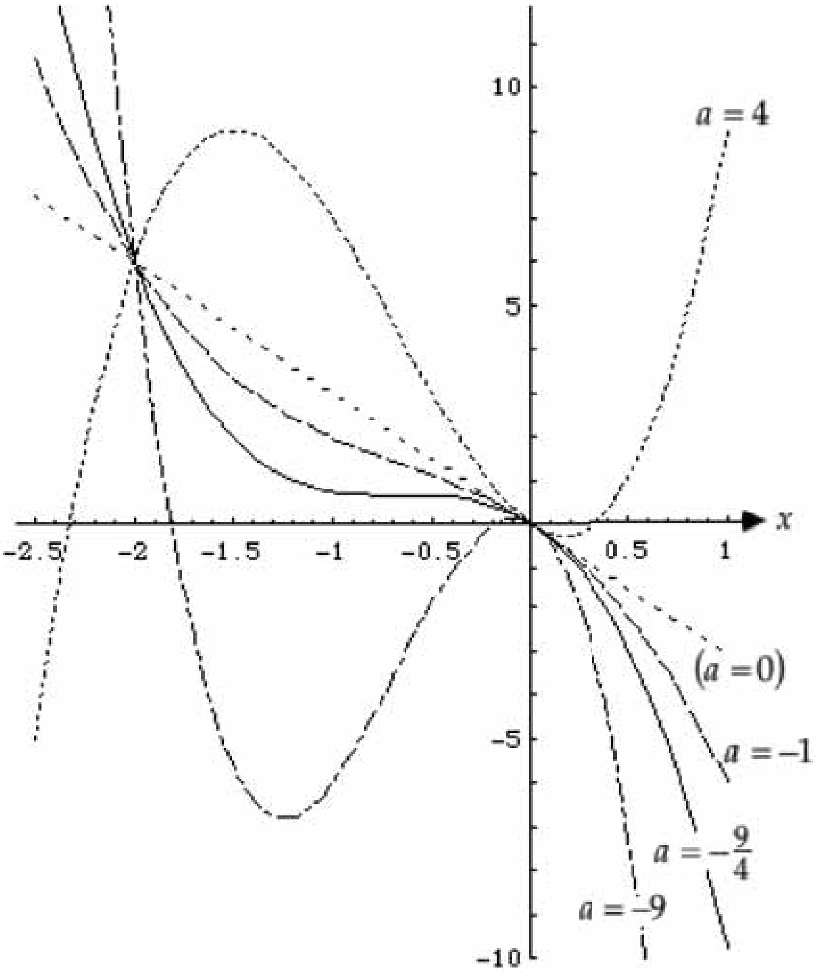

figura 14

Quesito 9

Si deve calcolare il valore del limite di un rapporto, per $x \to +\infty$. Occorre prestare attenzione al fatto che il numeratore della frazione non ha limite, per $x \to +\infty$, né finito né infinito.

La funzione $\operatorname{sen}x - \cos x$ non ha limite, per $x \to +\infty$, ma è limitata: infatti per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta $-1 \le \operatorname{sen}x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ e quindi

$$-2 \;\leq\; \operatorname{sen} x - \cos x \;\leq\; 2$$ [1]

Perciò, per ogni $x > 0$ risulta

$$-\frac{2}{x} \;\leq\; \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} \;\leq\; \frac{2}{x}$$

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$, per il primo Teorema di confronto per i limiti (conosciuto anche come "Teorema dei due carabinieri"), abbiamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = 0$. La risposta esatta fra quelle proposte è pertanto la (*a*).

Osserviamo che non sarebbe stato possibile calcolare detto limite facendo uso del Teorema di De l'Hôpital. Infatti il rapporto delle derivate di numeratore e denominatore della frazione $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$ è $\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{1}$, ossia $\cos x + \operatorname{sen} x$, espressione che non ha limite per $x \to +\infty$.
Si veda la risoluzione del seguente Quesito 10, per una più dettagliata esposizione del Teorema di De l'Hôpital.

Quesito 10

Come nel precedente quesito, si chiede di calcolare il limite per $x \to +\infty$ di un rapporto; in questo caso si deve anche discutere la possibilità di calcolare detto limite ricorrendo al Teorema di De l'Hôpital. Si dovrà quindi controllare se le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfano oppure no le ipotesi di tale Teorema.

Il limite proposto si calcola facilmente, ed è uguale a 1, come si può intuire osservando che i contributi di $\operatorname{sen} x$ al numeratore e di $-\cos x$ al denominatore "non contano", perché si tratta di funzioni limitate addizionate a x, il quale invece va all'infinito.
Per tradurre questa osservazione in passaggi rigorosi, possiamo procedere come segue:

(1) $$\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x} = \frac{x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{\cos x}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}}$$

Poiché per ogni x è $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, risulta per ogni $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \;\leq\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;\leq\; \frac{1}{x}$$

---

[1] In effetti si può verificare non difficilmente che per ogni x è $-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} x - \cos x \leq \sqrt{2}$; questa precisazione tuttavia non ha alcuna importanza per gli scopi del presente problema.

da cui segue, per il Teorema del confronto, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$, perché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ (il ragionamento è lo stesso già utilizzato nel precedente Quesito 9).

Nello stesso modo si prova che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$.

Tenendo presente l'espressione ottenuta in (1) abbiamo allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1 .$$

Passiamo ora alla discussione riguardo alla possibilità di calcolare tale limite servendosi del Teorema di De l'Hôpital.

Ricordiamo l'enunciato del Teorema di De l'Hôpital, nella sua forma più generale.

Sia $I\subseteq\mathbf{R}$ *un intervallo,* x_0 *un punto di accumulazione per* I *(*x_0 *può eventualmente essere* $+\infty$ *oppure* $-\infty$*).*
Siano f, g *due funzioni reali, definite in* $I-\{x_0\}$, *soddisfacenti le seguenti ipotesi:*

1) f *e* g *sono derivabili in* $I-\{x_0\}$.

2) $g'(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in I-\{x_0\}$

3) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ **oppure: 3')** $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$

4) *Esiste* $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, *numero reale oppure* $+\infty$ *oppure* $-\infty$.

Allora *esiste anche* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *anch'esso uguale a* ℓ.

Osserviamo che l'ipotesi **3')**, alternativa alla **3)**, ed a differenza di quest'ultima, esprime una richiesta solamente sulla funzione g.

Attualmente abbiamo $f(x)=x+\operatorname{sen} x$, $g(x)=x-\cos x$, $x_0=+\infty$.
Le funzioni f e g sono derivabili in ogni punto, quindi soddisfano l'ipotesi **1)**.
La derivata di g è $g'(x)=1+\operatorname{sen} x$. Questa si annulla ogni volta che $\operatorname{sen} x=-1$, cioè $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ con k intero.
Non esiste alcun intervallo I superiormente illimitato (ossia, avente $+\infty$ come punto di accumulazione) nel quale $g'(x)$ sia sempre

diversa da 0. L'ipotesi **2)** non è verificata. Questo esclude la possibilità di applicare il Teorema.
Potremmo fermarci qui; per completezza, controlliamo se f e g soddisfano oppure no le ipotesi **3)** (oppure **3')**) e **4)**.
Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x) = \lim_{x\to+\infty} x\Big(1-\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\downarrow\, 0}\Big) = +\infty,$$

vediamo che è soddisfatta l'ipotesi **3')**.
Per quanto riguarda l'ipotesi **4)** si ha che $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$.
Questa espressione non ha limite per $x\to+\infty$: per esempio essa vale 0 in tutti i punti in cui $\cos x=-1$ $\big(x=(2k+1)\pi\big)$, e vale 2 in tutti i punti del tipo $x=2k\pi$. Neppure l'ipotesi **4)** è verificata.
Quest'ultima è una ragione ancora "più forte" per non potere calcolare il limite proposto utilizzando il Teorema di De l'Hôpital, nel senso che semplici varianti di questo problema soddisfano le prime tre ipotesi, ma nuovamente falliscono sulla quarta: per esempio,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\operatorname{sen} x}{2x-\cos x} = 1\,.$$

(il risultato si ricava ragionando esattamente come nel nostro caso).
Attualmente le funzioni $f(x)=2x+\operatorname{sen} x$, $g(x)=2x-\cos x$, con $x_0=+\infty$ soddisfano **1)**, **3')** e anche la **2)**, essendo $g'(x)=2+\operatorname{sen} x$, sempre diversa da zero. Ma la **4)** continua a non essere soddisfatta, essendo $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2+\cos x}{2+\operatorname{sen} x}$, espressione che non ha limite per $x\to+\infty$.