Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2002-2003
Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto un piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana determinata dalla parabola e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3} cm^2$.

Problema 2.

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnare il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo avere stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed avere fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario.

1. Dopo avere fornito una definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire la misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pure rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e con B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

4. Il dominio della funzione $f(x) = \ln\left\{\sqrt{x+1} - (x-1)\right\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

$A)\ -1 < x \le 3;\quad B)\ -1 \le x < 3;\quad C)\ 0 < x \le 3;\quad D)\ 0 \le x < 3.$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6. La derivata della funzione $f(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione $f'(x)=x\,e^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ n,$$

moltiplicarli combinandoli in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a :

$$A)\ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;\qquad B)\ \frac{1}{3}n\cdot\left(n^2-1\right)$$

$$C)\ \frac{1}{24}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1)\qquad D)\ \frac{1}{24}n\cdot\left(n^2-1\right)\cdot(3n+2).$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8. x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x-y=2$. Il numero x^3-y^3:
A) è divisibile per 2 e per 3.
B) è divisibile per 2 ma non per 3.
C) è divisibile per 3 ma non per 2.
D) non è divisibile né per 2 né per 3.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10. Il valore dell'espressione $\log_2 3\cdot\log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Leggiamolo insieme

Problema 1

È un problema di geometria solida, consigliabile a chi ha una buona esperienza in questo campo: infatti, ad eccezione delle ultime due semplici domande riguardanti una parabola passante per tre punti, tutto il problema richiede ragionamenti non sempre immediati a proposito di un tetraedro regolare e della sfera in esso inscritta.

Poiché non è possibile disegnare una figura, se non in modo approssimativo, occorre una notevole immaginazione spaziale per condurre il procedimento in modo corretto.

Che cosa ripassare?

Geometria solida in generale; tetraedri, piramidi e relative formule; perpendicolarità di rette e piani nello spazio. Parabola passante per tre punti assegnati; area del segmento parabolico (con integrale o Teorema di Archimede).

Problema 2

È un problema di Analisi Matematica che non contiene particolari difficoltà. Non deve spaventare la presenza del valore assoluto, che si gestisce assai semplicemente, e che esce presto di scena, come pure il parametro m. Osserviamo peraltro che il valore assoluto non opera sulla variabile x, ma soltanto sul parametro m.
Segue un facile studio di funzione; l'unica difficoltà si può incontrare affrontando la domanda relativa alla derivata seconda: servono lo studio di una funzione ausiliaria (un polinomio di terzo grado) e l'applicazione del Teorema di Bolzano. Infine si deve calcolare l'area di una parte di piano, mediante un integrale, anch'esso assai semplice.
Complessivamente, il problema 2 appare alquanto più semplice del problema 1.

Che cosa ripassare?

Definizione di valore assoluto. Lo studio delle funzioni e dei loro grafici. Il Teorema di Bolzano. Calcolo di aree mediante gli integrali; l'integrazione delle funzioni razionali.

Soluzione del problema 1

Domanda *a*): relazione tra *V*, *S*, *r*.

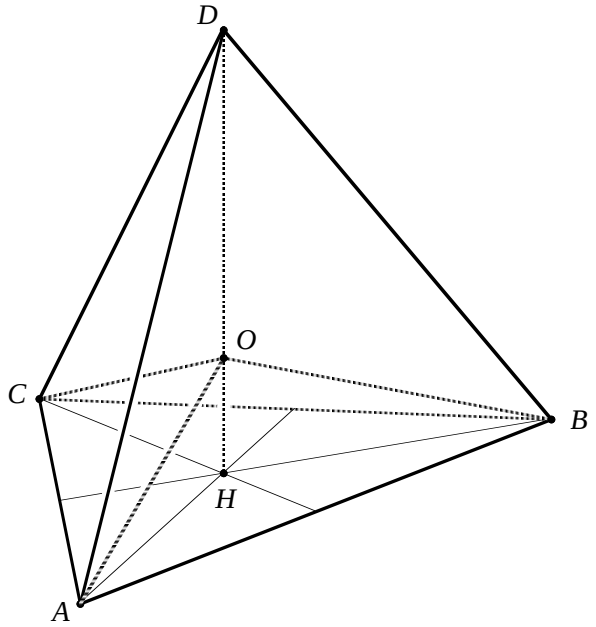


figura 1

Ricordiamo che si chiama *tetraedro regolare* un solido avente per facce quattro triangoli equilateri congruenti.
Il centro della sfera inscritta in *T* si trova, per ragioni di simmetria, nel punto *O* d'incontro delle quattro altezze del tetraedro.
Il raggio *r* di detta sfera è uguale alla distanza di *O* da ciascuna delle facce, cioè dai piedi di ciascuna delle quattro altezze; per esempio, $r = \overline{OH}$ essendo *H* il piede dell'altezza uscente dal vertice *D* (figura 1).
I segmenti *AO*, *BO*, *CO*, *DO* dividono *T* in quattro piramidi congruenti, aventi come basi le quattro facce di *T*, e come altezze il segmento *OH* (per *ABCO*), e segmenti analoghi per le altre tre piramidi. Ciascuna di queste altezze misura *r*, come si è detto.
Poiché le quattro piramidi interne sono congruenti, il volume di *T* è quadruplo del volume di ciascuna di esse. Allora:

$$(1) \qquad V = 4\cdot(Volume\ di\ \ ABCO) = 4\cdot\left(Area\ ABC\right)\cdot\overline{OH}\cdot\frac{1}{3}$$

Abbiamo già osservato che $\overline{OH} = r$; ora notiamo che $4\cdot\left(Area\ ABC\right)$ è l'area totale *S* del tetraedro. Pertanto da (1) abbiamo la relazione desiderata fra *V*, *S* e *r*:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sr}$$

Si può osservare che questa relazione vale non soltanto per il tetraedro regolare, ma più in generale per ogni poliedro circoscritto

ad una sfera di raggio r (cioè: ogni faccia è tangente alla sfera). Come prima, il poliedro si scompone in piramidi aventi come basi le facce del poliedro, e come altezza, per tutte, il raggio della sfera; il ragionamento su esposto si ripete identico, con la stessa conclusione.

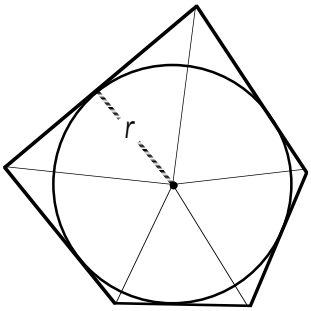


figura 2

Si tratta in sostanza della generalizzazione in tre dimensioni della regola che esprime l'area di un poligono circoscritto a una circonferenza in funzione del raggio r di questa e del perimetro $2p$ del poligono:

$$Area = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot r$$

(cfr.2.30); tale relazione si prova facilmente scomponendo il poligono in triangoli di altezza r come in figura 2.

Domanda *b*): rapporti di lunghezze e volumi fra T e T'

T e T' sono due tetraedri regolari, e quindi sono figure solide simili. Per trovare il rapporto tra gli spigoli di T e T' è sufficiente trovare il rapporto tra due qualsiasi segmenti corrispondenti nei due solidi.
Per motivi di simmetria, il centro di T' coincide col centro O di T.
I vertici T' sono il punto H, centro della faccia ABC (figura 1), e altri tre punti analogamente individuati sulle altre facce.
La relazione trovata in ***a)*** permette di dedurre che $\overline{OH} = \frac{1}{4}\overline{DH}$; infatti abbiamo ottenuto che

$$V = 4 \cdot (Area\ ABC) \cdot \overline{OH} \cdot \frac{1}{3};$$

d'altra parte, pensando T come piramide di base ABC e altezza DH, abbiamo che (cfr.2.46)

$$V = (Area\ ABC) \cdot \overline{DH} \cdot \frac{1}{3}.$$

Uguagliando le due espressioni di V ottenute, concludiamo che $\overline{OH} = \frac{1}{4}\overline{DH}$, come anticipato sopra.
Pertanto è $\overline{OD} = \frac{3}{4}\overline{DH}$, e di conseguenza

$$\overline{OD} = 3\overline{OH}.$$

OD e OH sono due segmenti corrispondenti, il primo nel tetraedro T, il secondo nel tetraedro T'. Se ne deduce che il rapporto lineare di similitudine fra T' e T è $\frac{1}{3}$. Dunque:

$$\boxed{\textit{Il rapporto fra gli spigoli di } T \textit{ e di } T' \textit{ vale } 3}$$

Il rapporto fra i volumi di due solidi simili è uguale al cubo del rapporto fra gli elementi lineari; perciò

$$\boxed{\textit{Il rapporto fra i volumi di } T \textit{ e di } T' \textit{ vale } 27}$$

Domanda *c*): distanza di *E* da *AB*.

Per prima cosa occorre stabilire dove si trova *E*. Ragioni di simmetria suggeriscono che *E* sia il punto medio di *CD*; ed infatti è così. Per provarlo, prendiamo come *E* il punto medio di *CD*, e proviamo che $ABE \perp CD$.

I segmenti *AE*, *BE* sono per costruzione mediane dei triangoli *ACD*, *BCD*; questi sono triangoli equi-lateri, quindi le mediane sono anche altezze, dun-que sono perpendicolari a *CD*. Così *CD* è perpendicolare a due rette del piano *ABE*, tra loro non parallele; ne segue che $ABE \perp CD$, come volevamo dimostrare.

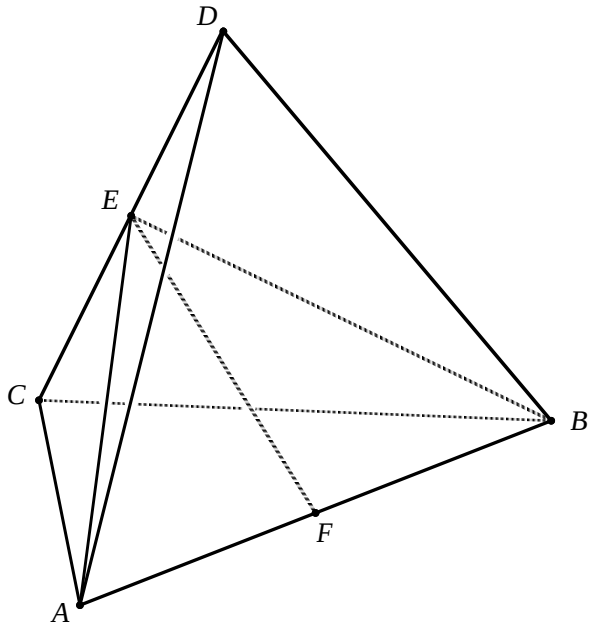


figura 3

La distanza richiesta di *E* dalla retta *AB* è la misura dell'altezza *EF* del triangolo *AEB*. Tale triangolo è isoscele, perché $\overline{AE} = \overline{BE}$, in quanto altezze di triangoli equilateri congruenti; dunque *F* è il punto medio di *AB*. $\overline{EF}$ si calcola facilmente servendosi del Teorema di Pitagora; se *s* è la lunghezza degli spigoli del tetraedro, allora $\overline{AE} = s\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AF} = \frac{1}{2}s$ e quindi

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}s\,;$$

$$\boxed{distanza(E,\, AB) = \frac{\sqrt{2}}{2}s}.$$

Domanda *d*): parabola passante per *A*, *B*, *E*.

D'ora in poi il problema non riguarda più questioni di geometria

dello spazio, perché la costruzione ha luogo interamente nel piano α.
Scegliamo un sistema di riferimento su α che rispetti la simmetria esistente fra i punti A, B, E con i quali dovremo operare. Per esempio, scegliamo l'asse x sulla retta AB, l'asse y sulla retta EF, con origine in F (figura 4, nella quale è già tracciata la parabola oggetto della presente domanda).

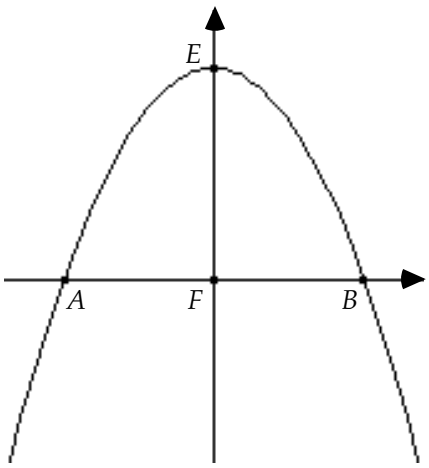


figura 4

Le coordinate di A, B, E rispetto a questo sistema di riferimento sono:

$$A\left(-\frac{s}{2},0\right),\quad B\left(\frac{s}{2},0\right),\quad E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}s\right).$$

Per trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per tali punti si può scrivere l'equazione generica

$$y = ax^2+bx+c,$$

imporre il passaggio per A, B, E, ottenendo un sistema con incognite a, b, c, e risolvere il sistema.

Più semplicemente, essendo i punti A e B sull'asse delle ascisse, si può osservare che il polinomio di secondo grado $p(x)$ avente per grafico la parabola p deve annullarsi quando x assume i valori $\pm\frac{s}{2}$, affinché p passi per A e B; quindi $p(x)$ deve essere della forma

$$\boxed{p(x) = a\left(x+\frac{s}{2}\right)\left(x-\frac{s}{2}\right) = a\left(x^2-\frac{s^2}{4}\right)}.$$

Affinché p passi anche per E deve risultare

$$\frac{\sqrt{2}}{2}s=-a\frac{s^2}{4} \qquad \text{e quindi} \qquad a=-\frac{2\sqrt{2}}{s}$$

L'equazione della parabola p è dunque

$$\boxed{\textit{parabola } p \textit{ per } A,B,E: \quad y=-\frac{2\sqrt{2}}{s}\left(x^2-\frac{s^2}{4}\right)}$$

(Osserviamo che una diversa scelta del sistema di riferimento avrebbe condotto a una diversa equazione).

Domanda *e*): area del segmento parabolico

L'area in questione di può calcolare per mezzo di un integrale, determinando prima l'equazione della retta EA. Questa è

$$y = \sqrt{2}\left(x+\frac{s}{2}\right)$$

come si ricava con facili calcoli (cfr.3.8).

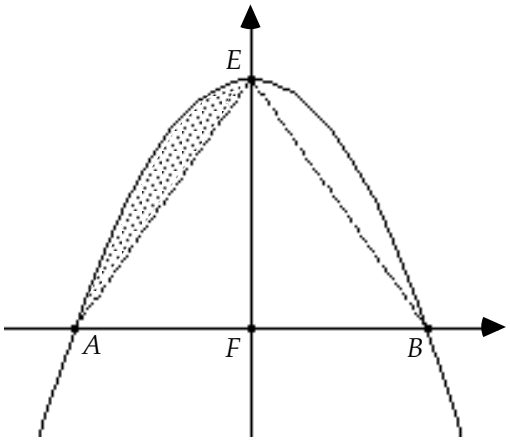


figura 5

L'area del segmento parabolico in oggetto è quindi data da (cfr.5.30):

$$Area = \int_{-\frac{s}{2}}^{0}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{s}\left(x^2-\frac{s^2}{4}\right)-\sqrt{2}\left(x+\frac{s}{2}\right)\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{24}s^2.$$

(Lasciamo al lettore il compito di svolgere il calcolo, un po' noioso ma privo di difficoltà di concetto).
Si può calcolare l'area desiderata anche in un altro modo, più semplice. La differenza fra l'area del segmento parabolico staccato dal segmento AB e l'area del triangolo ABE è uguale alla somma delle aree dei due segmenti parabolici staccati da AE e BE, cioè al doppio di ciò che ci occorre. Pertanto, l'area da noi cercata è:

(2) $$\frac{1}{2}\left[\left(area\ segm.\ par.\ base\ AB\right)-\left(area\ ABE\right)\right]$$

L'area del segmento parabolico di base AB si calcola immediatamen-te applicando il Teorema di Archimede (cfr.3.47):

$$area\ segmento\ parabolico\ di\ base\ AB = \frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\overline{FE} = \frac{2}{3}s^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}s^2.$$

L'area del triangolo ABE è:

$$area\ ABE = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{FE} = \frac{1}{2}s^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}s^2$$

Sostituiamo in (2) i valori trovati:

$$area\ segmento\ parabolico\ di\ base\ AE = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}s^2-\frac{\sqrt{2}}{4}s^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{24}s^2,$$

come avevamo già trovato.

Il testo richiede che quest'area misuri $\frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}^2$. Da

$$\frac{\sqrt{2}}{24}s^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}^2$$

ricaviamo $s^2 = 8\,\text{cm}^2$ e quindi

$$\boxed{s = 2\sqrt{2}\,\text{cm}}.$$

Soluzione del problema 2

Domanda *a*): "dominio di derivabilità" di *f*.

La funzione *f* è una funzione razionale fratta, e il valore assoluto non riguarda la variabile *x*; quindi, dove esiste, *f* è derivabile; il "dominio di derivabilità" coincide perciò con il dominio naturale di *f*. Questo dipende dal valore di *m*. Si ha infatti

$$|m| = \begin{cases} m & \text{se } m > 0 \\ -m & \text{se } m \le 0 \end{cases}$$

perciò l'espressione di $f(x)$ è

(1) $$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m} \text{ se } m > 0; \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2} \text{ se } m \le 0.$$

Nel primo caso il denominatore è sempre > 0, quindi il dominio di *f* è $]-\infty, +\infty[$; nel secondo caso il denominatore si annulla per $x = 0$, quindi il dominio di *f* è $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Domanda *b*): valore di *m* per cui risulta $f'(1) = 0$

Secondo che sia $m > 0$ oppure $m \le 0$ l'espressione di $f(x)$ è diversa (si veda la (1)); la derivata andrà calcolata separatamente nei due casi.

Se $m > 0$ è $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m}$ e quindi

(2) $$f'(x) = \frac{2(x^2+2m)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2m)^2} = \frac{-2x^2-2x+4m}{(x^2+2m)^2}.$$

Risulta allora

$$f'(1) = \frac{-4+4m}{(1+2m)^2}; \qquad f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4+4m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

La funzione corrispondente a $m = 1$ e la sua derivata (ottenuta da (2)) sono:

(3) $$\boxed{per\ \ m=1 \qquad f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}, \quad f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}}.$$

Bisogna controllare se il requisito $f'(1)=0$ è soddisfatto anche per $m<0$; calcoliamo dunque $f'(x)$ anche in questo caso.

Per $m<0$ risulta $f(x)=\frac{2x+1}{x^2}=\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=2x^{-1}+x^{-2}$, perciò

$$f'(x)=-2x^{-2}-2x^{-3}\ ; \qquad f'(1)=-4\neq 0$$

e quindi $m=1$ è l'unico valore che soddisfa alla richiesta.

Domanda *c*): studio di $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$ e discussione sui flessi.

Come abbiamo già osservato, la funzione in oggetto ha come dominio $\left]-\infty, +\infty\right[$. Essa ha segno positivo quando è positivo il numeratore, cioè quando $x>-\frac{1}{2}$.

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; quindi l'asse delle ascisse è asintoto per il grafico di *f*, sia per $x\to-\infty$, sia per $x\to+\infty$.

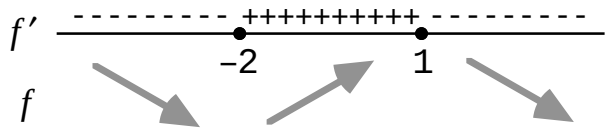
La derivata di *f* è già stata calcolata (si veda la (3)); è

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Il denominatore è positivo per qualunque valore di *x*; quindi il segno $f'(x)$ è quello del numeratore. Si ha

$$-2x^2-2x+4=0 \iff x^2+x-2=0 \iff x=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}.$$

Il segno di $f'(x)$ varia dunque come riportato nel seguente schema, il quale indica pure gli intervalli in cui *f* è crescente oppure decrescente.



f ha un minimo relativo (ed assoluto) per $x=-2$; ha un massimo relativo (ed assoluto) per $x=1$. I corrispondenti valori della funzione sono

$$f(-2)=-\frac{1}{2}\ ; \qquad f(1)=1.$$

Possiamo già disegnare il grafico di *f* (figura 6).

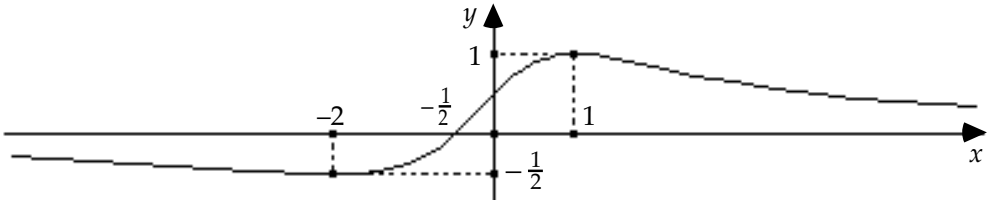


figura 6

Infine, occupiamoci della questione riguardante i flessi.
L'osservazione del grafico lascia intuire la presenza di tre flessi, uno in ciascuno degli intervalli $]-\infty,-2[$, $]-2,1[$, $]1,+\infty[$. Per trovarli dovremmo studiare il segno della derivata seconda di *f*, che ora andiamo a calcolare:

$$f''(x) = \frac{(-4x-2)(x^2+2)^2 + (2x^2+2x-4)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2+2)\left[(-2x-1)(x^2+2)+4x(x^2+2x-2)\right]}{(x^2+2)^4} = \frac{2(x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3}.$$

Le ascisse dei flessi di *f* sono le soluzioni dell'equazione

(4) $$2x^3+3x^2-12x-2 = 0$$

<u>Non bisogna assolutamente</u> accanirsi nel tentativo di *calcolare* le soluzioni di (4). Andiamo ora a verificare che la (4) non ha soluzioni razionali, quindi il loro calcolo con metodi elementari è impossibile.

Ricordiamo che, se $p(x)$ è un polinomio con coefficienti interi, e α è una radice di $p(x)$ (cioè $p(\alpha)=0$), allora:

• se α è un numero intero, α è divisore del termine noto di $p(x)$

• se α è razionale non intero, α è il rapporto fra un divisore del termine noto e un divisore del coefficiente del termine di grado massimo di $p(x)$.

Nel caso attuale, i numeri razionali che soddisfano questi requisiti sono soltanto ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{2}$. Una verifica diretta, cioè la sostituzione di x con ciascuno di questi 6 valori, mostra che nessuno di essi è soluzione di (4); quindi, come detto, (4) non ha soluzioni razionali.

Se leggiamo attentamente il testo vediamo che non si chiede di "trovare" i flessi, bensì di "dire quanti sono", e questo è un problema diverso, più semplice da risolvere.
Con questo scopo, e limitatamente a quanto per esso occorre,

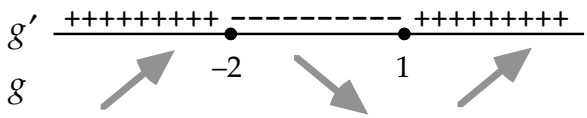
studiamo la funzione

$$g(x) \;=\; 2x^3+3x^2-12x-2.$$

g è definita in $]-\infty,+\infty[$; si ha $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$;

$$g'(x) \;=\; 6x^2+6x-12 \;=\; 6\left(x^2+x-2\right).$$

Risulta $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}-2\\1\end{cases}$. Il segno di $g'(x)$ e le sue conseguenze sulla crescenza e decrescenza di g sono descritti nel seguente schema:



–2 e 1 sono rispettivamente un punto di massimo relativo e un punto di minimo relativo per g. Per il nostro scopo (capire come varia il segno di g) è essenziale sapere se i valori che g assume in questi punti sono positivi o negativi. Calcoliamo dunque:

$$g(-2)=18\;; \qquad g(1)=-9$$

Il grafico di g ha il seguente andamento (figura 7)

La funzione continua g, negativa per $x\to-\infty$, positiva per $x=-2$ si annulla almeno una volta nell'intervallo $]-\infty,-2[$, per il Teorema degli zeri; si annulla una sola volta in questo intervallo, essendo strettamente crescente in $]-\infty,-2[$.

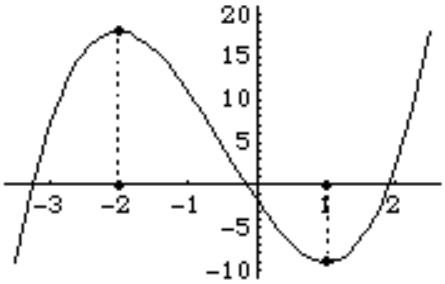


figura 7

Con analogo ragionamento si prova ciò che l'osservazione del grafico di g lascia intuire: g si annulla una sola volta in $]-2,1[$ e ancora una sola volta in $]1,+\infty[$.

Abbiamo così provato che

$$\boxed{f \text{ ha tre flessi}}.$$

Domanda *d*): calcolo dell'area

La regione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area (figura 8, dettaglio della figura 6) si trova fra $x=-\frac{1}{2}$ e $x=1$; in questo intervallo la funzione f è positiva; perciò (cfr.5.29)

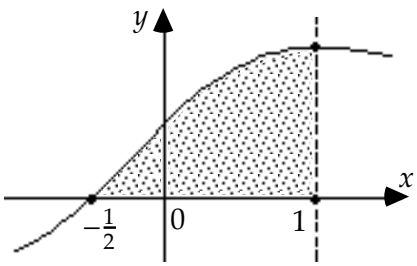


figura 8

$$Area = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx .$$

Il primo integrale è immediato, perché il numeratore è la derivata del denominatore, e vale

(5) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = \ln 3 - \ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo applicato le proprietà dei logaritmi, cfr.6.14, 6.15).

Per calcolare il secondo integrale, cioè $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx$ procediamo così:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

Ora può essere utile la sostituzione $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$, cioè $x = t\sqrt{2}$, da cui $dx = \sqrt{2}\,dt$; i nuovi estremi dell'integrale diventano $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Allora:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che la funzione arcotangente è dispari, cioè $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$).

L'area richiesta è la somma di questo valore con il risultato di (5):

$$\boxed{Area = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)}$$

Questionario

Quesito 1

È un quesito di geometria dello spazio, privo di difficoltà tecniche; occorre però una buona capacità di immaginare una figura tridimensionale.

Due rette si dicono *sghembe* se non sono complanari, cioè se non esiste un piano che le contenga entrambe.

La proposizione enunciata nel testo (proprietà transitiva della relazione "essere sghembe", fra coppie di rette) e falsa. Per convincersi di ciò è sufficiente esibire un esempio in cui la proprietà non vale.

Consideriamo un cubo come in figura 9; siano *x*, *z* le rette di due spigoli *AB* e *BC*, e *y* la retta dello spigolo *DE* perpendicolare alla faccia *ABCD*. Ebbene, le rette *x* e *y* sono sghembe, come pure *y* e *z*, ma *x* e *y* non sono sghembe, essendo incidenti, e quindi complanari.

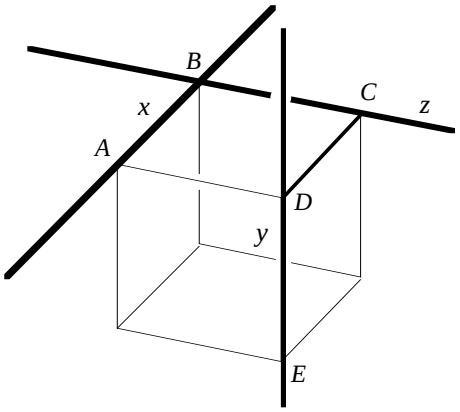


figura 9

Quesito 2

Ancora un quesito di geometria dello spazio, più difficile del precedente, per la casistica più ampia e per la maggiore difficoltà nel rappresentare la figura sul foglio.

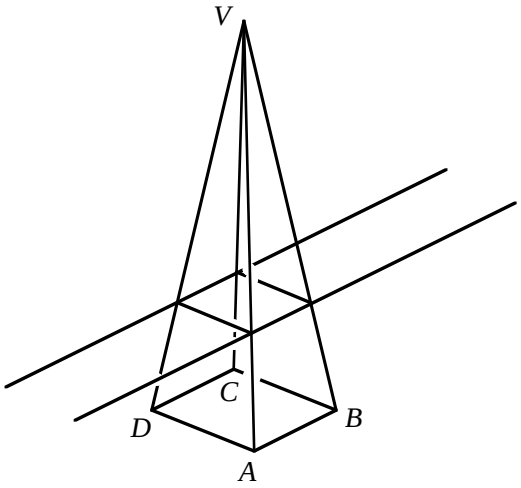


figura 10

Iniziamo dal caso più semplice: se il piano secante è parallelo al piano della base (figura 10), la sezione è un quadrato, in quanto omote-tico della base.

Se il piano (chiamiamolo α) è parallelo agli spigoli *AB* e *CD* della base, ma non agli spigoli *AD* e *BC* (figura 11), il quadrilatero sezione ha due lati paralleli ad *AB* e *BC*, quindi paralleli fra loro,

mentre gli altri due lati non sono paralleli; si tratta dunque di un trapezio, che non è un parallelogrammo.

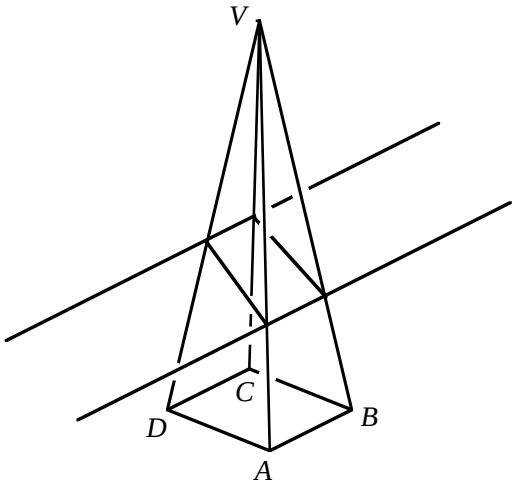


figura 11

Precisamente, la sezione è un trapezio isoscele, grazie alla simmetria di tutta la figura, in questo caso, rispetto al piano passante per il vertice *V* della piramide e per i punti medi degli spigoli *AB* e *CD*.
Le rette dei lati obliqui del trapezio sono incidenti nel punto in cui il piano α interseca la retta comune ai piani *ADV*, *BCV*.

Se il piano α non è parallelo ad alcuno degli spigoli della base, il quadrilatero sezione non ha coppie di lati paralleli; è un quadrilatero convesso che non è trapezio.

Infine, se il piano α non è parallelo alla base, ma è parallelo a una diagonale della base, allora il quadrilatero sezione ha le diagonali perpendicolari, ed i lati a due a due uguali.
Per dimostrare questo fatto, ragioniamo sulla figura 12, nella quale non sono tracciati gli spigoli della piramide, ma soltanto le rette contenenti l'altezza e le diagonali della base; sia *O* il punto d'intersezione di dette diagonali.
Consideriamo dunque un piano *p* parallelo a *BD*.
Siano rispettivamente *R*, *S* i punti in cui *p* interseca le rette *AC* e *OV*, *a* la retta lungo la quale *p* interseca il piano *VDO*, *P* un punto di *A* diverso da *S*.
La retta *a* è complanare a *BD*, e appartiene a un piano paral-lelo a *BD*; quindi $a // BD$; ne segue che $a \perp ROS$, e quindi l'angolo $P\hat{S}R$ è retto.
Ebbene, le diagonali del quadrilatero intersezione della piramide col piano α giacciono una su *a*, l'altra sulla retta *RS*, e

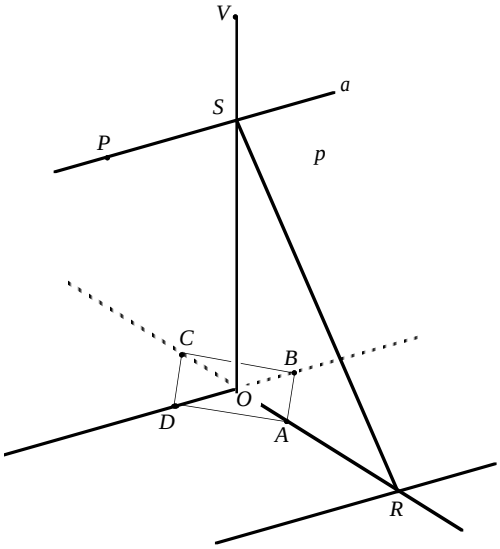


figura 12

quindi sono perpendicolari.
Infine, il piano *ROS* è piano di simmetria per l'intera figura; quindi i lati del quadrilatero sezione, aventi un punto in comune sulla retta *RS*, sono a due a due uguali.

Quesito 3

Si tratta di una facile questione di trigonometria; il metodo opportuno (applicazione del Teorema dei seni) è suggerito dal testo.

Si deve calcolare $\overline{AB}$, con *B* che si trova "oltre il fiume". In base alle ipotesi, è possibile misurare $\overline{AP}$ e gli angoli α e γ di vertici *A* e *P*: la misura degli angoli è possibile perché per ipotesi da *A* sono visibili sia *P* sia *B*, e da *P* sono visibili sia *A* sia *B*. È nota anche la misura del terzo angolo, $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.
Per il Teorema dei seni si ha

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\beta} \text{ e quindi}$$

$$\overline{AB} = \overline{AP}\,\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}.$$

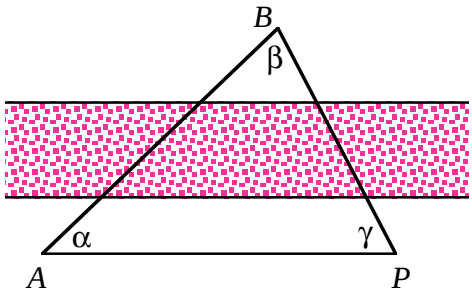


figura 13

Osservando che $\beta = \pi - \alpha - \gamma$ possiamo anche scrivere (cfr.4.13 e 4.14)

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha - \gamma) = \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha$$

e quindi

$$\overline{AB} = \overline{AP}\,\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha}.$$

Quesito 4

Il quesito, concettualmente banale, comporta semplicemente la risoluzione di un sistema di disequazioni; i calcoli richiedono una certa attenzione.

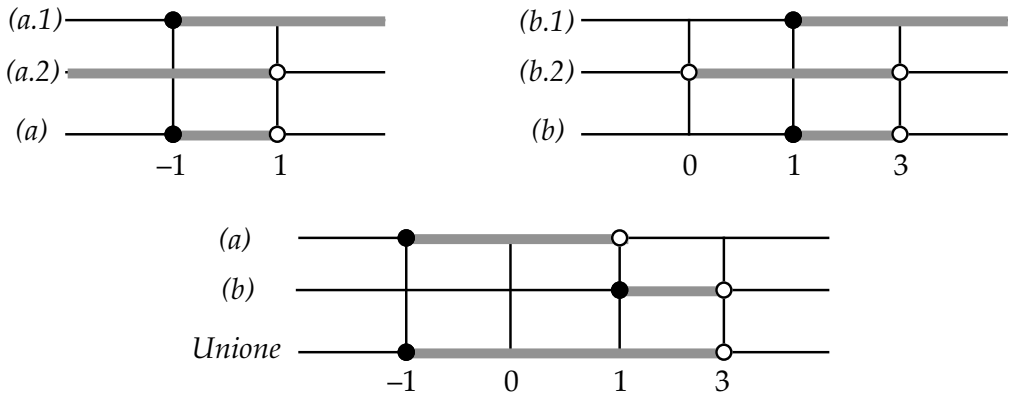
Affinché abbia senso l'espressione $\ln\left(\sqrt{x+1} - (x-1)\right)$ occorre che sia ≥ 0 il radicando e sia > 0 l'argomento del logaritmo. Abbiamo perciò da risolvere il sistema

$$(*)\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1} > x-1 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta da $x \in [-1, +\infty[$; la seconda equivale a

$$(a)\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (b)\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

La seconda disequazione di (*b*) equivale a $x^2 - 3x < 0$, verificata da $x \in]0,3[$; abbiamo quindi quanto segue:



Nell'intervallo $[-1,3[$ è soddisfatta anche la prima disequazione del sistema originale; tale intervallo è pertanto il dominio della funzione assegnata. La risposta esatta è perciò la *B*: $-1 \le x < 3$.
Il procedimento per la determinazione del dominio risulta semplificato servendosi di un grafico.

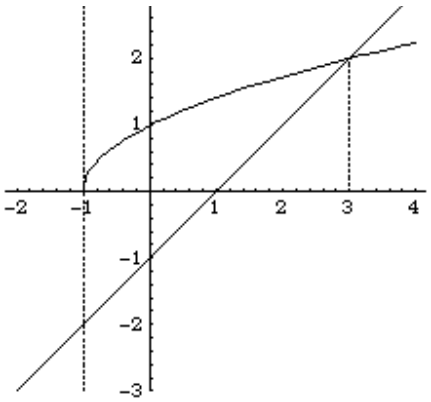


figura 14

Le curve di equazioni $y = \sqrt{x+1}$ e $y = x - 1$ (figura 14) si intersecano nel punto di ascissa 3; ciò risulta risol-vendo l'*equazione irrazionale*

$$\sqrt{x+1} = x - 1,$$

più semplice da trattare rispetto alla corrispondente disequazione; il grafico mostra che la retta $y = x - 1$ si trova al di sotto del ramo di parabola $y = \sqrt{x+1}$ se e solo se $-1 \le x < 3$ (la condizione $x \ge -1$ è necessaria per l'esistenza di $\sqrt{x+1}$).

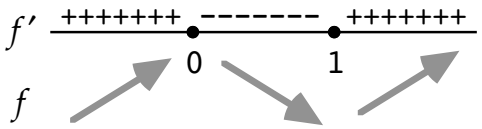
Quesito 5

È un quesito di Analisi Matematica; occorre svolgere lo studio parziale di una funzione (polinomio di grado 3), e tenere presente il Teorema degli zeri. Osserviamo che sarebbe del tutto inopportuno (e impossibile a realizzarsi in modo elementare) il tentativo di calcolare *le radici del polinomio, cercando di scomporlo in fattori, si veda anche la soluzione della domanda c) del problema 2.*

Poniamo $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$. La funzione è continua e derivabile in **R**; risulta poi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ ; \qquad f'(x) = 6x^2 - 6x\,.$$

Lo schema seguente indica come varia il segno di $f'(x)$, e di conseguenza gli intervalli in cui *f* è crescente o decrescente.



0 e 1 sono rispettivamente punto di massimo e di minimo relativo per *f*; risulta $f(0) = 2$, $f(1) = 1$. Siamo già in grado di tracciare un grafico qualitativo di *f* (figura 15), dal quale "si vede" che c'è un unico punto di intersezione con l'asse *x*, di ascissa negativa.

Per provare questo fatto ragioniamo nel modo seguente:

Risulta $f(-1) = -3 < 0$, $f(0) = 2 > 0$; f è continua in $[-1,0]$; per il Teorema degli zeri in questo intervallo c'è almeno un punto x_0 in cui $f(x_0) = 0$; x_0 è unico in questo intervallo, perché in $[-1,0]$ *f* è strettamente crescente.

Non ci sono altri punti in cui $f(x) = 0$: infatti per $x < -1$ i valori che *f* assume sono minori di $f(-1) = -3 < 0$, mentre in $[0,+\infty[$ il minimo valore assunto da *f* è $f(1) = 1$, quindi $f(x) \geq 1$ in $[0,+\infty[$. Quindi il polinomio *f* ha un'unica radice $x_0 \in [-1,0]$.

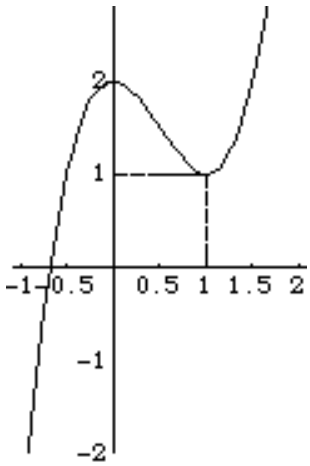


figura 15

Aggiungiamo una osservazione che ci sembra piuttosto importante. Qualcuno, per affrontare problemi del tipo di questo, interpreta l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ come equazione risolvente del sistema

$$\begin{cases} y = 2x^3 \\ y = 3x^2 - 2 \end{cases}$$

e cerca di dedurre la presenza e il valore approssimativo di eventuali soluzioni dell'equazione, dal confronto dei grafici delle due curve rappresentate dalle equazioni del sistema.

Ebbene, questo metodo può avere qualche utilità come approccio intuitivo al problema, ma non dimostra alcunché.

Nel caso attuale il disegno (figura 16)

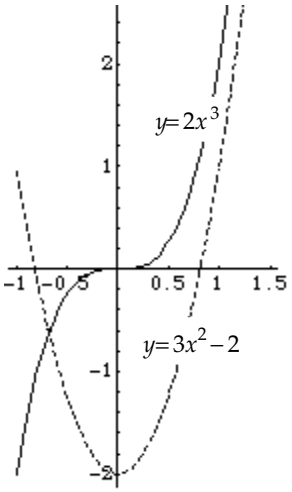


figura 16

lascia intuire abbastanza chiaramente che la parabola (tratteggiata) e la cubica (a tratto continuo) si intersecano in un punto di ascissa negativa, ma non ne fornisce una prova; inoltre non è evidente se le due curve hanno oppure no un punto di intersezione con ascissa positiva, cioè se la cubica "sale abbastanza in fretta" da evitare l'intersezione con la parabola, o se invece tale intersezione ha luogo. Quest'ultimo dubbio è ancora più consistente se i grafici, anziché essere tracciati con precisione da un calcolatore, sono disegnati approssimativamente a mano.
Per queste ragioni è opportuno ragionare come esposto all'inizio, e non in quest'ultimo modo.
Chi è molto legato all'uso di questo cosiddetto "metodo grafico" sia consapevole, almeno, che i risultati così ottenuti vanno poi dimostrati in altro modo; in generale applicando il Teorema degli zeri ad una opportuna funzione.

Quesito 6

È un quesito di Analisi Matematica; occorre l'applicazione del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale, in modo opportuno. È da evitare il tentativo, impossibile a realizzarsi, di calcolare una primitiva della funzione integranda.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale dice che:

se g è una funzione reale continua in un intervallo I, e $x_0 \in I$ *allora,*

posta $P(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, P *è derivabile in* I *e* $P'(x) = g(x) \quad \forall\, x \in I$.

Il secondo estremo dell'integrale nel testo del quesito è x^2, non x; ciò dà luogo ad una funzione composta:

$$\text{detta } P(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \text{ risulta } f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt = P(x^2).$$

Tenendo presente il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale e la regola per la derivazione di una funzione composta abbiamo

$$f'(x) \;=\; P'(x^2)\cdot 2x \;=\; e^{-(x^2)^2}\cdot 2x \;=\; 2x\,e^{-x^4}$$

come si voleva dimostrare.
In alternativa (ma il procedimento risulta più complicato) si può effettuare un cambiamento di variabile nell'integrale che definisce $f(x)$, facendo in modo che l'estremo variabile diventi x, dopo di che l'applicazione del Teorema fondamentale del Calcolo Integrale riesce in modo diretto.
Poniamo dunque $u = \sqrt{t}$, ossia $t = u^2$ (questa sostituzione è lecita perché t varia nell'intervallo $[0, x^2]$ di valori positivi). Allora gli

estremi dell'integrale diventano $\sqrt{0}=0$ e $\sqrt{x^2}=|x|$; in particolare, se $x \geq 0$, il secondo estremo è x; limitiamoci per ora a questo caso.
Se $x \geq 0$ abbiamo dunque

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt = \int_0^{x} e^{-(u^2)^2}\,2u\,du = 2\int_0^{x} u\,e^{-u^4}\,du$$

e ora, per il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale,

$$f'(x) = 2\,x\,e^{-x^4}.$$

Se $x<0$ si ha $f(x)=2\int_0^{-x} u\,e^{-u^4}\,du$. Una nuova sostituzione, $u=-v$, dà $f(x)=2\int_0^{x} -v\,e^{-v^4}(-dv)=2\int_0^{x} v\,e^{-v^4}\,dv$, da cui nuovamente $f'(x)=2\,x\,e^{-x^4}$ come si voleva.
Si tratta come si vede di un metodo artificioso. Si noti che in questo procedimento la distinzione fra i due casi $x \geq 0$ e $x<0$ è necessaria, altrimenti la dimostrazione è incompleta.

Quesito 7

Il quesito, di argomento relativo al calcolo combinatorio, è formulato male. Non è chiaro, in particolare, se i fattori di ciascun prodotto indicato dal testo debbono essere diversi fra loro oppure sono ammessi anche i prodotti con due fattori uguali. Considereremo entrambe le possibilità, che danno luogo, naturalmente, a risultati diversi.
Per le ambiguità del testo, ma anche per le oggettive difficoltà tecniche, questo quesito appare notevolmente più difficoltoso degli altri.

1) <u>Sono ammessi anche i prodotti con due fattori uguali</u>.
La somma da calcolare è, in simboli,

$$\sum_{i,j=1}^{n} i\cdot j.$$

Questa è uguale a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

tenendo presente che $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} j = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Scegliamo quindi la risposta *A*.
La formula $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ può essere provata per induzione; riportiamo la dimostrazione alla fine dell'esposizione relativa al

presente quesito.

Lo stesso ragionamento può essere spiegato, più faticosamente, senza usare il simbolo di sommatoria:
La somma da calcolare è

$$\begin{aligned} & 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+1\cdot n+ \\ & +2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+2\cdot n+ \\ & +\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots+ \\ & +n\cdot 1+n\cdot 2+n\cdot 3+\ldots+n\cdot n = \end{aligned}$$

$$= 1\cdot(1+2+\ldots+n)+2\cdot(1+2+\ldots+n)+\ldots+n\cdot(1+2+\ldots+n)=$$

$$=(1+2+\ldots+n)\cdot(1+2+\ldots+n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

2) <u>i fattori di ciascun prodotto debbono essere diversi</u>
In questo caso, alla somma calcolata sopra va sottratta la somma dei prodotti con fattori uguali fra loro, cioè

$$1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+n\cdot n = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(anche di questa formula riportiamo la dimostrazione alla fine).

A questo punto, il risultato cercato si ottiene come differenza fra quello trovato precedentemente e l'espressione scritta qui sopra, cioè

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}\right] =$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3n^2-n-2}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}.$$

Questo risultato "assomiglia" (è il doppio) a quello della risposta *D*.
Si ottiene esattamente il risultato *D* se si specifica che ciascun prodotto va preso *in un solo ordine* (per esempio se sommiamo 2·3 dovremo scartare 3·2); in questo modo il risultato va dimezzato rispetto a quanto da noi calcolato sopra, e si ottiene *D*.
Una maggiore precisione nella formulazione del testo sarebbe stata veramente necessaria.

Infine, riportiamo le dimostrazioni per induzione delle due formule che abbiamo utilizzato.

1) La formula è: $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Essa è evidentemente vera quando $n=1$: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Supponendo vera la formula per un determinato n (ipotesi di induzione), proviamola per $n+1$; mostriamo cioè che

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Si ha

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = [1+2+\ldots+n]+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

(per l'ipotesi di induzione); svolgiamo ora il calcolo:

$$= (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right] = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

come si voleva dimostrare.

2) La formula è: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Essa è evidentemente vera quando $n=1$: $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$.

Supponendo vera la formula per un determinato n (ipotesi di induzione), proviamola per $n+1$; mostriamo cioè che

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Si ha

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

(per l'ipotesi di induzione); svolgiamo ora il calcolo:

$$(n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6}+n+1\right) = \frac{(n+2)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

come si voleva dimostrare.

Osserviamo tuttavia che la dimostrazione per induzione non è "costruttiva", ossia serve per dimostrare (nel nostro caso) le formule che abbiamo utilizzato in precedenza, ma non a scoprirle; e se la prima, cioè $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, è abbastanza nota (ed è altresì la somma di una progressione aritmetica), la seconda, cioè quella relativa alla somma dei quadrati, ben difficilmente è conosciuta a memoria dagli studenti.

Quesito 8

È un semplice quesito di aritmetica; per la risoluzione è sufficiente utilizzare adeguatamente i prodotti notevoli.

Due numeri naturali dispari x, y tali che $x-y=2$ possono essere indicati: $x=2m+1$, $y=2m-1$ con m numero intero qualunque.
Si ha allora

$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 2\left((2m+1)^2 + (2m+1)(2m-1) + (2m-1)^2\right) =$$
$$= 2\left(4m^2 + 4m + 1 + 4m^2 - 1 + 4m^2 - 4m + 1\right) = 2\left(12m^2 + 1\right).$$

L'espressione ottenuta manifesta che si tratta di un numero divisibile per 2, ma non divisibile per 3: infatti $12m^2+1$ non è divisibile per 3 per nessun valore di *m*, perché la divisione di $12m^2+1$ per 3 dà resto 1 qualunque sia il numero intero *m*.
La risposta esatta è pertanto la *B*.

Osserviamo che per provare che $x^3 - y^3$ non è *in generale* divisibile per 3 quando *x* e *y* sono numeri dispari consecutivi, è sufficiente esibire un controesempio; è sufficiente quindi scegliere $x = 3$, $y = 1$ e osservare che $x^3 - y^3 = 27 - 1 = 26$, non divisibile per 3. Ciò che abbiamo provato sopra è una proprietà più forte: abbiamo dimostrato che *in nessun caso* la differenza $x^3 - y^3$, con *x* e *y* dispari consecutivi, è divisibile per 3.
Non si sarebbe potuto invece dedurre la divisibilità per 2 dall'esame di casi particolari, dovendosi provare che tale divisibilità vale in generale.
L'esame di casi particolari è sufficiente per accertarsi che <u>non vale</u> una presunta proprietà generale; può anche essere utile per giudicare "probabile" che una certa proprietà, valida in casi particolari, possa valere in generale; ma in quest'ultimo caso si deve successivamente procedere con una dimostrazione rigorosa.

Quesito 9

È un semplice esercizio di calcolo combinatorio. Si presume la conoscenza da parte del candidato delle regole con cui si svolge l'estrazione del Lotto; in particolare, del fatto che non è rilevante l'ordine con cui si presentano i cinque numeri estratti, e che i numeri nell'urna vanno da 1 a 90.

Le cinquine contenenti i numeri 1 e 90 sono tante quante sono le terne di numeri estratti dall'insieme $\{2, 3, 4, \ldots, 88, 89\}$. Ciascuna di questa terne, accompagnata ai numeri 1 e 90, forma una cinquina del tipo desiderato.
Il numero di terne estraibili da un insieme di 88 elementi è per definizione il numero delle combinazioni di 88 elementi a 3 a 3, ovvero (cfr.1.20)

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3!} = 109'736.$$

Il risultato è facilmente deducibile anche senza disporre della formula, ragionando direttamente:

Il primo dei tre numeri da affiancare a 1 e 90 può essere scelto in 88 modi; il secondo in 87 modi, il terzo in 86 modi; abbiamo così $88 \cdot 87 \cdot 86$ possibilità. Ma poiché l'ordine non è rilevante, ciascuna terna appare così ripetuta 6 volte, potendosi ordinare in $3! = 6$ modi una lista di 3 elementi; per esempio

$$(2,3,4),\ (2,4,3),\ (3,2,4),\ (3,4,2),\ (4,2,3),\ (4,3,2).$$

Pertanto il numero cercato è, come già detto, $\frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6} = 109'736$.

Quesito 10

Si richiede la verifica di una proprietà dei logaritmi, in un caso particolare. È utile ricordare la formula per il cambiamento di base dei logaritmi.

Per verificare se l'uguaglianza dichiarata è vera o falsa applichiamo la formula per il cambiamento di base (cfr.6.19), in modo da avere logaritmi rispetto ad una sola base, per esempio 2.
Se a, b sono numeri positivi diversi da 1, e x è un numero positivo, allora

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

In particolare abbiamo

$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$$

tenendo presente che $\log_2 2 = 1$. Allora

$$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 1$$

e quindi l'affermazione contenuta nel testo è vera.