Esame di Stato di Liceo Scientifico
a.s. 2002-2003
Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$$\overline{AB} = 3 \text{ cm}; \qquad \overline{AC} = 2 \text{ cm}; \qquad C\hat{A}B = 60°.$$

Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.

b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.

c) Si trovi sul lato AD, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.

d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

Problema 2.

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente gli spigoli delle basi e l'altezza del tronco di cono che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b e h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.

b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.

c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima

trovata.

***d*)** Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

Questionario.

1. Tra i rettangoli aventi la stessa area di $16\,\mathrm{m}^2$ trovare quello di perimetro minimo.

2. Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x$?

3. Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

4. Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

5. Dare una giustificazione delle formule

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \cos(2\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

6. Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

7. Enunciare il Teorema del valor medio o di Lagrange (da *Giuseppe Luigi Lagrange* (1736-1813)) e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

8. Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che $f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$. Quale è $f(x)$?

9. Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

10. Definire gli asintoti - orizzontale, obliquo, verticale - di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Leggiamolo insieme

Problema 1

È un classico problema di geometria piana, la cui risoluzione più naturale applica metodi di trigonometria (in particolare, il Teorema di Carnot), e il Teorema della bisettrice. È tuttavia possibile una risoluzione alternativa, con tecniche di geometria analitica.
La domanda (***b***) chiede la valutazione di certi angoli con la calcolatrice; si presti attenzione ad usarla correttamente.
Infine si deve discutere un'equazione di secondo grado dipendente da un parametro; la discussione è riconducibile con tecniche standard all'intersezione di un arco di parabola con un fascio di rette parallele all'asse delle ascisse.

Che cosa ripassare?

Il Teorema di Carnot; il Teorema della bisettrice. Le istruzioni per l'uso della calcolatrice scientifica, riguardo alle funzioni circolari inverse. La discussione dei problemi di secondo grado parametrici, col metodo della parabola.

Problema 2

È un problema di geometria solida abbastanza complesso in alcune parti. La prima domanda (volume del tronco di cono) non è chiara come dovrebbe, non essendo specificato quali regole debbono ritenersi note. La seconda domanda consiste in un problema di massimo, risolubile con metodi consueti di calcolo differenziale; la determinazione della funzione da rendere massima richiede un po' di attenzione, come pure i calcoli conseguenti. La terza domanda (raggio sfera circoscritta) è semplice, ma occorre un po' di immaginazione per visualizzare la figura solida. Si conclude con una banale valutazione di capacità in litri del solido ottenuto.

Che cosa ripassare?

Le formule relative al volume e alla superficie laterale di piramidi e tronchi di piramide. Le proprietà delle proporzioni. L'applicazione delle derivate alla risoluzione di problemi di massimo e minimo. I Teoremi di Euclide.

Soluzione del problema 1

In tutto lo svolgimento tralasciamo per semplicità l'indicazione dell'unità di misura «cm»; operiamo cioè con numeri puri, restando inteso che dove questi esprimono lunghezze di segmenti, si tratta di lunghezze misurate in centimetri.

Il problema può risolversi in modi diversi; qui esponiamo due risoluzioni: la prima basata sulla trigonometria, la seconda svolta mediante la geometria analitica.

1. Risoluzione per via trigonometrica.

Domanda *a*): lunghezze di *BC*, *CD*, *DB*.

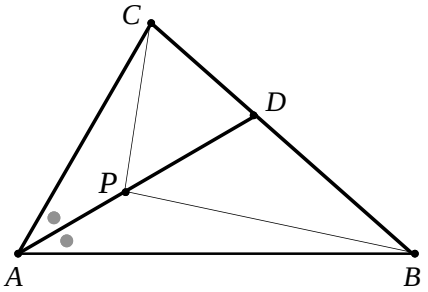


figura 1

La misura di *BC* si calcola immediatamente per mezzo del Teorema di Carnot, o del coseno (cfr.4.50):

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\left(C\hat{A}B\right)} =$$
$$= \sqrt{9+4-6} = \sqrt{7}$$

tenendo presente che

$$\cos\left(C\hat{A}B\right) = \cos(60°) = \tfrac{1}{2}.$$

Per il Teorema della bisettrice (cfr.3.23), *CD* e *DB* sono proporzionali a *AC* e *AB*; tenendo conto delle misure note di questi ultimi si ha

$$CD : DB = AC : AB = 2:3$$

da cui, applicando la proprietà del "comporre":

$$\left(\overline{CD} + \overline{DB}\right) : \overline{CD} = (2+3) : 2\,;$$

ora, poiché $\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{BC} = \sqrt{7}$, possiamo ricavare $\overline{CD} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$ e di conseguenza $\overline{DB} = \frac{3}{5}\sqrt{7}$. Riepiloghiamo i risultati:

$$\boxed{\overline{BC} = \sqrt{7}\,; \qquad \overline{CD} = \frac{2}{5}\sqrt{7}\,; \qquad \overline{DB} = \frac{3}{5}\sqrt{7}}$$

Domanda *b*): misure degli angoli e lunghezza di *AD*.

Indichiamo con β e γ rispettivamente gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.
Il valore di $\cos\beta$ si può calcolare applicando il Teorema di Carnot: da

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos\beta$$

ricaviamo

$$\cos\beta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}} = \frac{9+7-4}{6\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}.$$

Ancora il Teorema di Carnot, applicato al triangolo *ABD*, consente di calcolare la lunghezza di *AD*:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cos\beta} = \sqrt{9 + \frac{63}{25} - \frac{36}{5}} = \sqrt{\frac{108}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

Infine, le misure degli angoli. Essendo noto $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$, e poiché la misura in radianti di β sta certamente fra 0 e π, risulta

$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

Qualunque calcolatrice scientifica è in grado di fornire un'approssimazione decimale di questo valore, con la funzione di solito indicata $\cos^{-1}$, situata nella tastiera come "seconda funzione" del tasto cos.
Occorre tuttavia fare attenzione all'impostazione della calcolatrice, nella modalità RAD oppure DEG. Nel primo caso $\cos^{-1}$ fornisce una misura in radianti, cioè l'effettivo valore della funzione <u>arcocoseno</u>; nel secondo caso la misura dell'angolo viene data <u>in gradi</u>.
(Oltre a RAD e DEG c'è una terza possibilità, GRAD, "gradi centesimali": l'unità di misura è la centesima parte dell'angolo retto).
Con la calcolatrice impostata su DEG calcoliamo $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.
Otteniamo il risultato 40,89339465. Questa è la misura in gradi (approssimata) di β. La stessa misura può essere convertita in gradi-primi-secondi. In generale la calcolatrice ha la possibilità di eseguire automaticamente questo calcolo; si trova nel nostro caso $40°53'36'',22$ (il 22 rappresenta *centesimi di secondo*).
La misura di γ si può calcolare analogamente a come abbiamo calcolato β oppure più semplicemente per differenza, tenendo presente che la somma delle misure (in gradi) dei tre angoli di un triangolo è 180°; perciò la misura in gradi di γ è $79°06'23'',78$.
Riassumiamo i risultati:

$$\boxed{\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}\ ;\ \ \overline{AD} = \frac{6}{5}\sqrt{3}\ ;\ \ \beta \cong 40°53'36'',22\ ;\ \ \gamma \cong 79°06'23'',78}$$

Domanda *c*): determinazione del punto *P*.

Poniamo $\overline{AP} = x$ (figura 1) Avendo sopra calcolato $\overline{AD} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$ abbiamo già a disposizione le limitazioni da imporre a x:

$$0 \le x \le \frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

Si ha $\overline{PA}^2 = x^2$; le espressioni di $\overline{PB}^2$ e $\overline{PC}^2$ si ottengono applicando il Teorema di Carnot, tenendo presente che per ipotesi gli angoli $P\hat{A}B$ e $P\hat{A}C$ misurano entrambi 30°, quindi il loro coseno vale $\frac{1}{2}\sqrt{3}$:

$$\overline{PB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AP}\cdot\overline{AB}\cos(P\hat{A}B) = x^2 + 9 - 3x\sqrt{3}\,;$$

$$\overline{PC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AP}\cdot\overline{AC}\cos(P\hat{A}C) = x^2 + 4 - 2x\sqrt{3}.$$

L'equazione risolvente la questione di determinare P su AD in modo che risulti $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = m^2$ è pertanto:

(1) $$\boxed{3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13 = m^2}$$

Domanda *d*): discussione dell'equazione (1)**.**

Le soluzioni della (1) forniscono soluzioni del problema geometrico soltanto se il loro valore è compreso fra 0 e $\frac{6}{5}\sqrt{3}$; dobbiamo quindi stabilire per quali m la (1) ha una o due soluzioni comprese in questo intervallo. Assumiamo che m sia un numero reale positivo.
Per prima cosa calcoliamo per via geometrica i valori che m deve assumere affinché P si trovi nelle posizioni-limite, cioè coincida con A oppure con D: è la cosiddetta "discussione preliminare".

$\boxed{\text{Se } P \equiv A}$ si ha

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 0 + 9 + 4 = 13;\ \text{quindi } m^2 = 13,\ m = \sqrt{13}.$$

$\boxed{\text{Se } P \equiv D}$ abbiamo $\overline{PA} = \overline{DA} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$ calcolata al punto ***c)***; poi $\overline{PB} = \overline{DB} = \frac{3}{5}\sqrt{7}$, $\overline{PB} = \overline{DB} = \frac{2}{5}\sqrt{7}$, calcolati al punto ***a)***. Perciò

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{108}{25} + \frac{63}{25} + \frac{28}{25} = \frac{199}{25}$$

e quindi deve essere $m^2 = \frac{199}{25}$, $m = \frac{\sqrt{199}}{5}$.

Passiamo alla discussione della (1); dovremo riscontrare, fra gli altri, i valori ottenuti nella discussione preliminare; il mancato riscontro sarebbe sintomo di qualche errore, di calcolo o altro.
La (1) si può interpretare come l'equazione risolvente del sistema

(2) $$\begin{cases} y = 3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13 \\ y = m^2 \end{cases}$$

La prima equazione di (2) rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y con vertice (cfr.3.35) nel punto $\left(\frac{5}{6}\sqrt{3}, \frac{27}{4}\right)$; la seconda equazione rappresenta una retta parallela all'asse x, che si sposta al variare di m.

Poiché interessano soluzioni di (1) comprese fra 0 e $\frac{6}{5}\sqrt{3}$, dovremo stabilire per quali valori di m la retta interseca la parabola in un punto dell'arco corrispondente a $0 \le x \le \frac{6}{5}\sqrt{3}$, tracciato a linea continua nella figura 2.
Sostituendo i valori delle ascisse nell'equazione della parabola si calcolano le rispettive ordinate:

se $x=0$, $y=13$; se $x=\frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y=\frac{199}{25}$.

Vediamo quindi che:

La retta $y=m^2$ interseca l'arco ammissibile di parabola in <u>due punti</u> se $\frac{27}{4} \le m^2 \le \frac{199}{25}$, cioè $\frac{3\sqrt{3}}{2} \le m \le \frac{\sqrt{199}}{5}$; se $m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ i due punti sono coincidenti; se $m=\frac{\sqrt{199}}{5}$ un punto è il secondo estremo dell'arco, corrispondente alla soluzione $x=\frac{6}{5}\sqrt{3}$, ovvero al caso $P \equiv D$; l'altro punto d'intersezione è interno all'arco.

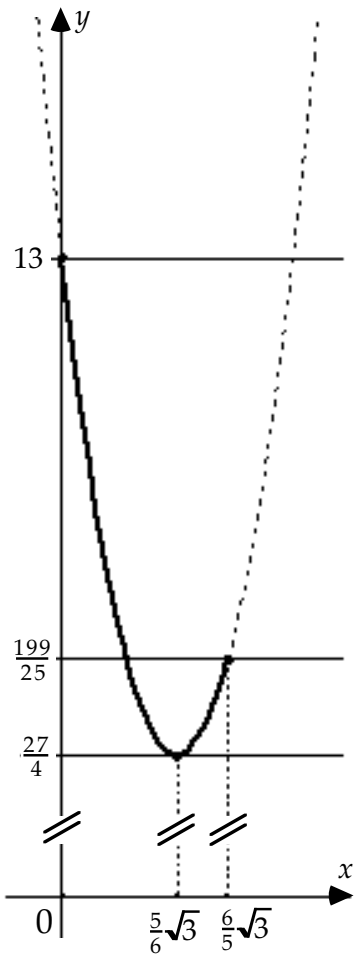


figura 2

La retta $y=m^2$ interseca l'arco ammissibile di parabola in <u>un solo punto</u> se $\frac{\sqrt{199}}{5} < m \le \sqrt{13}$; se $m=\sqrt{13}$ si ha l'altra soluzione-limite, corrispondente a $x=0$, cioè a $P \equiv A$.

Per valori positivi di m esterni all'intervallo $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, \sqrt{13}\right]$ le intersezioni fra retta e parabola non esistono o sono esterne all'arco ammissibile; quindi per tali valori di m il problema geometrico è impossibile.

Riassumiamo i risultati:

$$\boxed{\begin{array}{l} \textit{Per } \frac{3\sqrt{3}}{2} \le m \le \frac{\sqrt{199}}{5} \textit{ il problema ha due soluzioni} \\ \textit{Per } \frac{\sqrt{199}}{5} < m \le \sqrt{13} \textit{ il problema ha una soluzione} \end{array}}$$

2. Risoluzione mediante la geometria analitica.

Domande *a*) e *b*).

Consideriamo un sistema di riferimento con l'origine in *A*, l'asse *x* orientato da *A* verso *B* e l'asse *y* orientato in modo che l'ordinata di *C* sia positiva (figura 3).

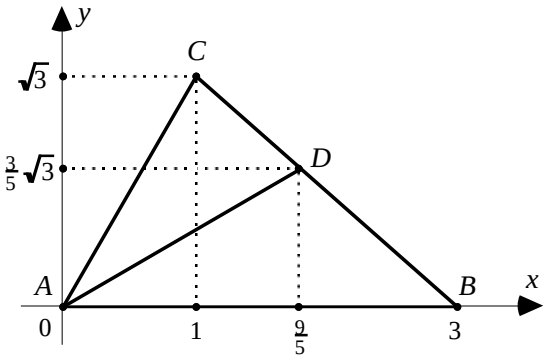


figura 3

Abbiamo cosi immediatamente $A\,(0,0)$, $B\,(3,0)$. Poi, tenendo presente che $\overline{AC}=2$ e $B\hat{A}C=60°$, troviamo $C\,(1,\sqrt{3})$.

Calcoliamo ora la distanza fra *B* e *C* (cfr.3.1):

$$\overline{BC}=\sqrt{(1-3)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{7}.$$

Per calcolare le coordinate di *D* possiamo applicare il Teorema della bisettrice dal quale segue, come già ricordato, che $BD:CD=3:2$.

Il punto *D* interno al segmento *BC*, che lo divide in parti proporzionali a 3 e 2 ha coordinate

$$\left(\frac{2x_B+3x_C}{5},\frac{2y_B+3y_C}{5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\sqrt{3}\right).$$

La misura di *AD* è la distanza di *D* dall'origine:

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{108}}{5}=\frac{6}{5}\sqrt{3}.$$

Le coordinate di *D* si possono anche determinare puramente per via analitica, come intersezione delle rette *BC* e *AD*: vediamo anche questo calcolo.

La retta *AD*, passante per l'origine, e inclinata di 30° rispetto all'asse *y* (perché bisettrice di $B\hat{A}C$) ha equazione (cfr.3.15)

$$y=\mathrm{tg}(30°)\cdot x \quad \text{cioè} \quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

La retta *BC* ha equazione (cfr.3.8)

$$y\cdot(1-3)=(x-3)\cdot\sqrt{3}\,; \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ricaveremo le coordinate di *D* risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = \dfrac{3}{5}\sqrt{3} \\ x = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Calcoliamo ora $\cos\beta$ $(\beta = A\hat{B}C)$. β è il supplementare dell'angolo formato dalla retta BC con il semiasse x positivo; quindi $\mathrm{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, perché il coefficiente angolare di BC è $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conoscendo $\mathrm{tg}\beta$, e il fatto che β è un angolo acuto possiamo calcolare $\cos\beta$ (cfr.4.12):

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}.$$

Per quanto riguarda il calcolo numerico delle misure degli angoli, si veda quanto detto nella prima risoluzione.

Domanda *c*).

Un punto P del segmento AD ha coordinate

$$P\left(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x\right), \qquad 0 \le x \le \frac{9}{5},$$

tenendo presente che OD ha equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e che l'ascissa di D è $\frac{9}{5}$. Applicando per tre volte la formula per la distanza fra due punti calcoliamo ora

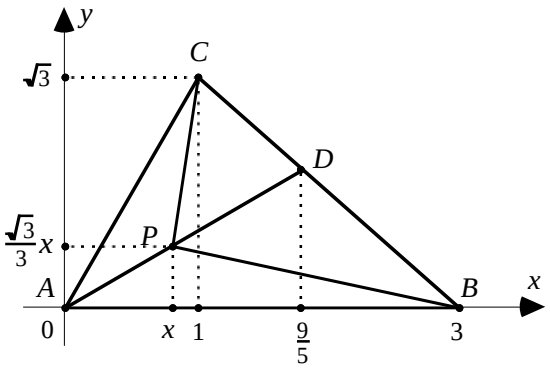


figura 4

$$\overline{PA}^2 = x^2 + \frac{1}{3}x^2 = \frac{4}{3}x^2; \quad \overline{PB}^2 = (x-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 - 6x + 9;$$

$$\overline{PC}^2 = (x-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3}x^2 - 4x + 4.$$

Perciò

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 4x^2 - 10x + 13.$$

L'equazione risolvente è dunque

(3) $\qquad 4x^2 - 10x + 13 = m^2, \qquad$ con le limitazioni $0 \le x \le \frac{9}{5}$.

Qualcuno potrebbe essere sorpreso dal fatto che l'equazione

risolvente che abbiamo ottenuto non coincide con la (1) trovata con il procedimento trigonometrico. Non c'è invece motivo di meravigliarsi: la lettera x usata in entrambi i casi per indicare l'elemento incognito non rappresenta la stessa lunghezza nei due casi: nella (1) è $x = \overline{PA}$; nella (3) è $x = ascissa\ di\ A$.
Riscriviamo la (1) usando una lettera diversa da x, per esempio t, e accanto la (3):

$3t^2 - 5t\sqrt{3} + 13 = m^2$, $t = \overline{PA}$, con le limitazioni $0 \le t \le \frac{6}{5}\sqrt{3}$;

$4x^2 - 10x + 13 = m^2$, $x = ascissa\ di\ A$, con le limitazioni $0 \le x \le \frac{9}{5}$.

La relazione tra t e x relativi a un medesimo punto P è semplice:

$$t = \overline{PA} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{3}x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}x.$$

Ebbene, sostituendo nella (1) (scritta con t) l'espressione $\frac{2}{\sqrt{3}}x$ al posto di t si ottiene esattamente la (3); e le limitazioni $0 \le t \le \frac{6}{5}\sqrt{3}$ diventano proprio $0 \le x \le \frac{9}{5}$. Si ha dunque perfetta coerenza tra quanto ottenuto in ciascuno dei due modi.

Domanda *d*): discussione dell'equazione (3)**.**

La discussione della (3) con le limitazioni $0 \le x \le \frac{9}{5}$ si svolge nello stesso modo esposto nella prima risoluzione, ricavando gli stessi risultati relativamente ai valori di m. Lasciamo al lettore il compito di svolgere i calcoli.

Soluzione del problema 2

Domanda *a*): volume del tronco di piramide.

Questa domanda si presta a diverse interpretazioni; non è specificato, infatti, quali regole debbano ritenersi note, per potere da esse dedurre quanto desiderato.
Esiste infatti una formula per il volume del tronco di piramide (cfr.2.49), indipendentemente dalla forma delle basi: indicate con S_1 e S_2 le aree della base maggiore e della base minore, e con h l'altezza, il volume V del tronco di piramide è:

(1) $$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

Se si ritiene nota la (1), la richiesta di questa prima parte del problema si soddisfa immediatamente: basta osservare che attualmente $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$, cosicché

(2) $$\boxed{V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + b^2 + ab\right)}$$

Se giudichiamo questo ragionamento troppo sbrigativo, cioè se riteniamo di dover partire "più da lontano", assumiamo come nota la formula per il volume di una piramide di area di base S e altezza H (cfr.2.46):

(3) $$V = \frac{1}{3}S \cdot H.$$

Dalla (3) e dalle misure assegnate delle dimensioni del tronco di piramide, cerchiamo l'espressione del volume di quest'ultimo.

Prolunghiamo gli spigoli del tronco fino al loro punto d'incontro V, vertice della piramide il cui tronco è oggetto del nostro studio (figura 5). Il volume del tronco di piramide è la differenza fra il volume della piramide di vertice V e base $ABCD$ e il volume della piramide con vertice V e base $A'B'C'D'$.

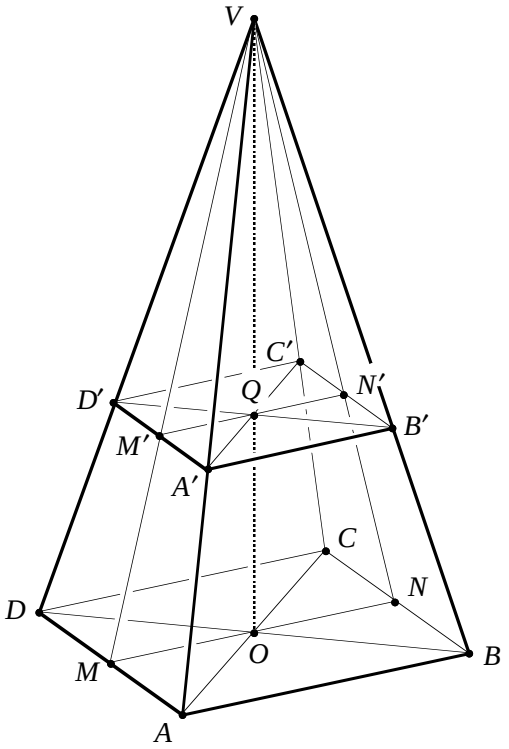


figura 5

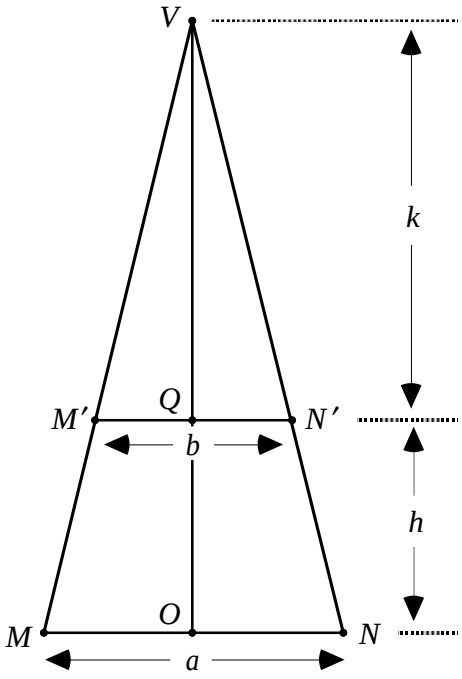


figura 6

Per calcolare i volumi delle due piramidi ci occorrono le loro altezze, espresse in funzione di a, b, h.

Consideriamo la sezione della piramide con il piano passante per V e per i punti medi M e N di AD e BC (figura 6). Tale piano passa anche per i punti medi M' e N' di $A'D'$ e $B'C'$ e per i centri O e Q di $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

Sia $\overline{VQ} = k$: dobbiamo esprimere k in funzione di a, b, h.

Dalla similitudine fra i triangoli $VM'N'$ e VMN abbiamo

$$VO : VQ \;=\; MN : M'N'.$$

Passando alle misure la precedente proporzione si scrive

$$h+k : k \;=\; a : b$$

e applicando la "proprietà dello scomporre"

$$(h+k-k) : k \;=\; (a-b) : b \qquad \text{cioè} \qquad h : k \;=\; (a-b) : b$$

da cui si ricava

$$k \;=\; \frac{bh}{a-b}.$$

Adesso calcoliamo i volumi V_1 e V_2 delle due piramidi ("grande" e "piccola").

La piramide "grande" ha area di base a^2 e altezza

$$h+k \;=\; h+\frac{bh}{a-b} \;=\; \frac{h(a-b)+bh}{a-b} \;=\; \frac{ah}{a-b}$$

cosicché per la (3) il suo volume è

$$V_1 \;=\; \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{ah}{a-b} \;=\; \frac{1}{3}\frac{a^3 h}{a-b}.$$

La piramide "piccola" ha area di base b^2 e altezza $k = \frac{bh}{a-b}$; pertanto il suo volume è

$$V_2 \;=\; \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} \;=\; \frac{1}{3}\frac{b^3 h}{a-b}.$$

Il volume del tronco di piramide è

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{3}h\frac{a^3-b^3}{a-b} = \frac{1}{3}h\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

in accordo con quanto riportato in (2).

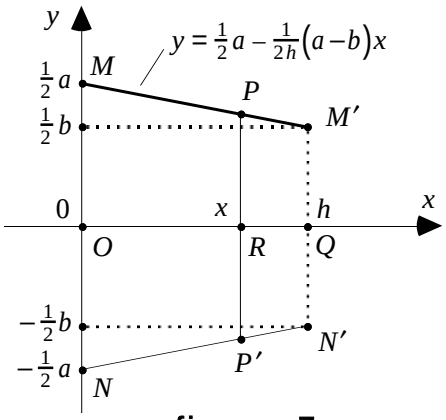


figura 7

Il volume del tronco di piramide si può calcolare anche mediante il calcolo integrale: il volume del tronco è dato dall'integrale tra 0 e h dell'area delle sezioni parallele alle basi (analogamente a come si procede per il calcolo del volume di un solido di rotazione).

La figura 7 riproduce ruotata di 90° una parte della figura 6, e rappresenta la sezione del tronco di piramide col piano passante per i punti M, N, M', N', i quali sono definiti come nelle figure 5 e 6. È stato introdotto un sistema

di riferimento come indicato nella figura 7. La retta MM' ha, rispetto a questo sistema di riferimento, la seguente equazione:

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2h}(a-b)x.$$

Se R è un punto di OQ che dista x da O, allora l'area del quadrato sezione del tronco di piramide col piano passante per R e parallelo alle basi è

$$\overline{PP'}^2 = \left(2\,\overline{PR}\right)^2 = \left(a - \frac{a-b}{h}x\right)^2$$

e quindi il volume del tronco è

$$V = \int_0^h \left(a - \frac{a-b}{h}x\right)^2 dx = -\frac{1}{3}\frac{h}{a-b}\left[\left(a - \frac{a-b}{h}x\right)^3\right]_{x=0}^{x=h} =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{h}{a-b}\left[b^3 - a^3\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

come avevamo ottenuto in precedenza.

Domanda *b*): piramide di volume massimo.

Esponiamo due diverse risoluzioni, che differiscono per la scelta degli elementi incogniti; con calcoli diversi si perviene, naturalmente, ai medesimi risultati

Prima risoluzione.

Facciamo ancora riferimento alla figura 5. Il volume di una piramide con base quadrata di lato a e altezza H è dato da

(4) $$Volume = \frac{1}{3}a^2 \cdot H.$$

Il dato assegnato della superficie laterale stabilisce un legame fra a e H dal quale vogliamo ricavare una delle due variabili a oppure H in funzione dell'altra, così da riuscire ad esprimere il volume in funzione di una sola variabile.

La superficie laterale della piramide è data da: (cfr.2.44)

$$Area\ laterale = \frac{1}{2}\left(perimetro\ di\ base\right) \cdot apotema.$$

Attualmente il perimetro di base è $4a$; l'apotema MV misura

$$\overline{MV} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{MO}^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2}$$

cosicché la relazione data dal testo si esprime:

$$\frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2} = \sqrt{3} \quad \text{cioè} \quad a\sqrt{4H^2 + a^2} = \sqrt{3}.$$

Possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dell'ultima uguaglianza ottenendo

$$a^2\left(4H^2 + a^2\right) = 3.$$

Conviene sviluppare il calcolo per ricavare H in funzione di a, piuttosto che viceversa. Abbiamo dunque

(5) $$4H^2 + a^2 = \frac{3}{a^2}; \quad H^2 = \frac{3 - a^4}{4a^2}; \quad H = \frac{\sqrt{3 - a^4}}{2a}.$$

S'impone la limitazione

(6) $$3 - a^4 \geq 0 \quad \text{cioè} \quad a \leq \sqrt[4]{3}$$

affinché l'espressione che rappresenta H^2 sia positiva. Ricordiamo poi che a rappresenta una quantità positiva, essendo la lunghezza di un segmento; la (6) impone che a sia *strettamente positivo*, cioè $a > 0$, escludendo il caso-limite $a = 0$, perché in questo caso risulterebbe nulla anche la superficie laterale.
Sostituendo nella (4) l'espressione di H ricavata in (5) abbiamo

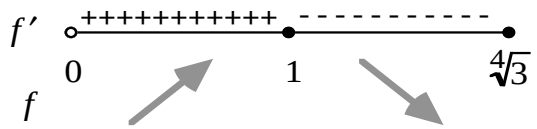
(7) $$\textit{Volume} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3 - a^4}}{2a} = \frac{1}{6}a\sqrt{3 - a^4} \equiv f(a); \quad a \in \left]0, \sqrt[4]{3}\right].$$

Non deve creare imbarazzo il fatto che la variabile indipendente sia in questo caso indicata dalla lettera a anziché la più consueta x: i calcoli che seguono si svolgono, naturalmente, secondo le stesse regole.
Per calcolare più agevolmente la derivata conviene "portare dentro alla radice" il fattore a; tutto ciò non crea difficoltà, perché a è certamente positivo. Dunque

$$f(a) = \frac{1}{6}\sqrt{3a^2 - a^6};$$

$$f'(a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6a - 6a^5}{2\sqrt{3a^2 - a^6}} = \frac{a\left(1 - a^4\right)}{2\sqrt{3a^2 - a^6}} = \frac{1 - a^4}{2\sqrt{3 - a^4}}.$$

Il segno di $f'(a)$ è positivo quando $a^4 < 1$, ovvero $a < 1$ (tenendo presente che $a > 0$); l'andamento di $f(a)$ è schematizzato qui sotto:



La piramide di volume massimo si ottiene per $a = 1$. L'altezza della piramide di volume massimo è (dalla (5)) $H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Seconda risoluzione.

Come prima, indichiamo con a lo spigolo di base della piramide; come secondo elemento variabile prendiamo questa volta l'*apotema*

della piramide, $\overline{VM} = x$.
Questa scelta facilita l'espressione della superficie laterale

$$Area\ laterale \ = \ 2ax$$

cosicché il vincolo imposto dal testo si esprime semplicemente:

(8) $$2ax \ = \ \sqrt{3}$$

L'altezza si calcola applicando il Teorema di Pitagora al triangolo VMO (figura 6):

$$\overline{VO} \ = \ \sqrt{\overline{VM}^2 - \overline{MO}^2} \ = \ \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - a^2}$$

Da (8) ricaviamo, per esempio, $x = \frac{\sqrt{3}}{2a}$, cosicché l'altezza è

$$\overline{VO} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \frac{3}{4a^2} - a^2} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 - a^4}{a^2}} \ = \ \frac{\sqrt{3 - a^4}}{2a}$$

come avevamo ottenuto nella (5); da qui la risoluzione prosegue come nel caso precedente.

Se, invece, da (8) ricaviamo $a = \frac{\sqrt{3}}{2x}$ otterremo l'altezza e il volume espressi in funzione di x:

$$H \ = \ \overline{VO} \ = \ \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4x^2}} \ = \ \frac{\sqrt{16x^4 - 3}}{4x};$$

$$Volume = \frac{1}{3}a^2 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4x^2} \cdot \frac{\sqrt{16x^4 - 3}}{4x} = \frac{1}{16}\frac{\sqrt{16x^4 - 3}}{x^3} \equiv g(x), \quad x \in \left[\frac{\sqrt[4]{3}}{2}, +\infty\right[$$

Studiando il segno della derivata di g si verifica che il volume massimo è assunto per $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (lasciamo al lettore il compito di svolgere il calcolo). Il risultato concorda con quanto trovato in precedenza, perché $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e la relazione (8) forniscono $a = 1$, come avevamo ottenuto prima.

Domanda *c*): sfera circoscritta alla piramide di volume massimo.

Il problema è di facile risoluzione se si osserva che un *cerchio massimo* di tale sfera (cioè un cerchio avente lo stesso diametro della sfera) è quello contenente, per esempio, i punti A, C, V.

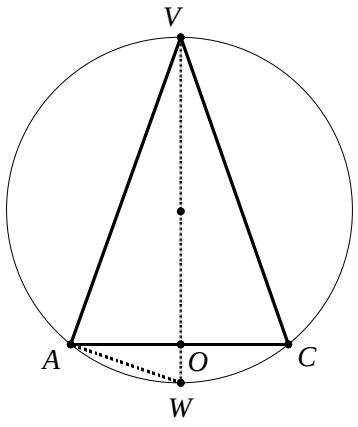


figura 8

Infatti la sfera, essendo circoscritta alla piramide, deve passare per i punti *V*, *A*, *B*, *C*, *D*. Per motivi di simmetria il centro della sfera deve appartenere all'altezza della piramide e quindi, ad esempio, il cerchio passante per *V*, *A*, *C* è un cerchio massimo (figura 8).
Prolunghiamo l'altezza *VO* del triangolo *ACV* fino ad incontrare la circonferenza in *W*. Il triangolo *AWV* è rettangolo in *A*, perché inscritto in una semicirconferenza. Possiamo calcolare la misura di *VW*, diametro del cerchio e della sfera che stiamo studiando, mediante il primo Teorema di Euclide (cfr.2.8):

(9) $$OV : AV = AV : VW .$$

La misura di *OV* è nota, essendo l'altezza *H* della piramide di volume massimo, calcolata nella risoluzione della domanda ***b***):

$$\overline{OV} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Per calcolare $\overline{AV}$ applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo *AOV*; *AO* è la metà della diagonale del quadrato di base della piramide, il cui lato misura $a = 1$ (determinato in ***b***)), quindi $\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

$$\overline{AV}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{VO}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

Adesso da (9) ricaviamo

$$\overline{VW} = \frac{\overline{AV}^2}{\overline{OV}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} .$$

Questo è il *diametro* della sfera; il suo raggio è la metà:

raggio sfera circoscritta alla piramide di volume massimo : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Questo risultato poteva essere ricavato in modo molto più semplice prestando maggiore attenzione alla particolarità delle misure ottenute per la piramide di volume massimo: essendo $\overline{AO} = \overline{VO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, il triangolo rettangolo *AVW* <u>è anche isoscele</u>; quindi *O* è il centro del cerchio, il cui raggio è quindi già disponibile e

misura $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La figura 8, disegnata in modo generico, non è fedele a queste misure. La figura 9 rappresenta più fedelmente la situazione reale.

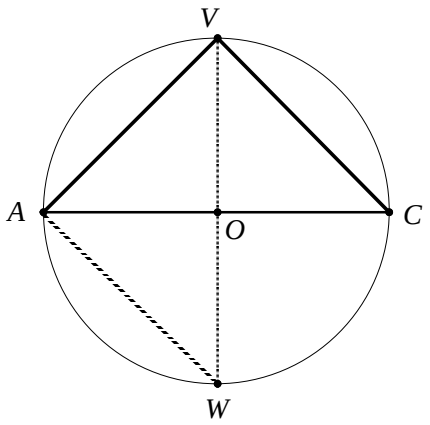


figura 9

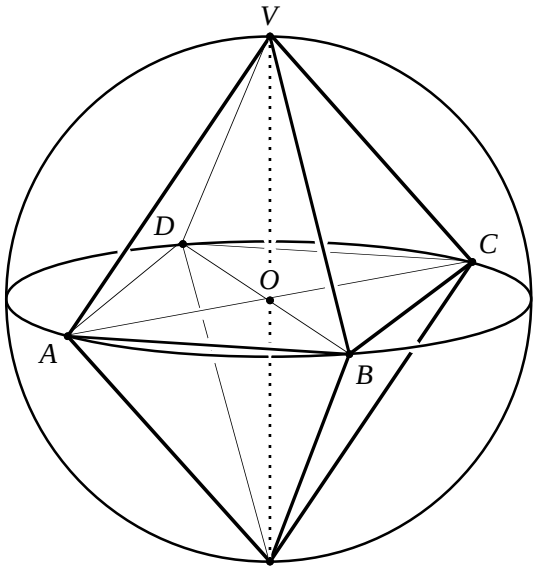


figura 10

Si nota che la piramide di volume massimo con assegnata superficie laterale è alquanto speciale: si tratta infatti della metà di un ottaedro regolare, sezionato lungo uno dei suoi piani di simmetria contenenti quattro spigoli (figura 10).

Per verificare che la piramide ottenuta è la metà di un ottaedro regolare basta osservare che tutti gli spigoli (laterali e di base) della piramide hanno la stessa lunghezza, di 1 dm; quindi le quattro facce laterali della piramide sono triangoli equilateri.

Domanda *d*): capacità della sfera in litri.

La sfera ottenuta ha raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm; l'unità di misura di lunghezza, sottintesa nei punti precedenti, assume ora un ruolo essenziale.

Il volume di detta sfera (cfr.2.64) misura

$$\textit{Volume sfera} \;=\; \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \mathrm{dm}^3 \;=\; \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\,\mathrm{dm}^3 \;=\; 1{,}48096\ldots\,\mathrm{dm}^2\,.$$

La capacità di 1 litro equivale al volume di 1 dm^3; lo stesso numero che esprime il volume della sfera in dm^3 ne esprime la capacità in litri; perciò:

$$\boxed{\textit{Capacità sfera} \;\cong\; 1{,}48096 \text{ litri}}\,.$$

sessione suppletiva 2002-2003

Questionario

Quesito 1

È un semplice problema di minimo; si tratta di un esempio spesso presentato fra le prime applicazioni del calcolo differenziale.

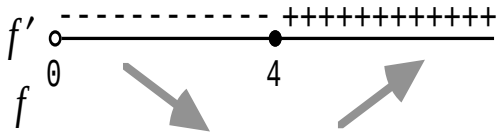
Siano x, y le misure dei lati del rettangolo (in metri). L'area vale allora $x \cdot y$, mentre il perimetro è $2x + 2y$. Dal valore noto dell'area, 16 m^2, abbiamo $x \cdot y = 16$, $y = \frac{16}{x}$, cosicché il perimetro è

$$Perimetro \;=\; 2x + 2 \cdot \frac{16}{x} \;=\; 2x + \frac{32}{x} \;\equiv\; f(x), \quad \text{con } x > 0.$$

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) \;=\; 2 - \frac{32}{x^2} \;=\; 2\frac{x^2 - 16}{x^2}$$

Il segno di $f'(x)$ in funzione del valore di x e le conseguenze di ciò sulla crescenza o decrescenza di f sono qui sotto schematizzati:



Il minimo valore di f è assunto per $x = 4$. Osserviamo che, questo valore di x corrisponde al caso in cui il rettangolo è in effetti un quadrato; dunque, tra tutti i rettangoli di assegnata area, quello con il minimo perimetro è il quadrato.

Quesito 2

Si richiede la definizione di "funzione periodica", e la determinazione del periodo di una semplice funzione trigonometrica. Non ci sono particolari difficoltà.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$. Si dice che f è *periodica* se esiste $T > 0$ tale che:

1) *Per ogni* $x \in \mathbf{R}$, *per ogni* $k \in \mathbf{Z}$, $x \in A \Rightarrow x + kT \in A$

($\mathbf{Z}$ indica l'insieme dei numeri interi, positivi e negativi).

2) *Per ogni* $x \in A$, *per ogni* $k \in \mathbf{Z}$, *risulta* $f(x + kT) = f(x)$

Il minimo $T > 0$ che soddisfa 1) e 2) si chiama *periodo* di f.

Gli esempi più noti di funzioni periodiche sono le funzioni circolari: seno e coseno, periodiche di periodo 2π, tangente e cotangente, periodiche di periodo π.

La somma di due funzioni periodiche di periodo T è ancora periodica di periodo T (più precisamente: se f e g sono definite in un insieme A che soddisfa 1), ed entrambe soddisfano 2), allora anche $f + g$ soddisfa 2)); potrebbe accadere che il periodi di $f + g$

risultasse minore di T; in tal caso ne sarebbe un sottomultiplo).
Poiché $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono periodiche di periodo 2π, la funzione

$$f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x$$

soddisfa 2) con $T = 2\pi$; è poi evidente che nessun sottomultiplo di 2π soddisfa la 2); quindi la funzione f assegnata è periodica di periodo 2π.

Quesito 3

Si chiede un esempio di solido avente un'assegnata superficie laterale. Ci sono, ovviamente, infinite risposte possibili.

Tra le tante risposte possibili:

- Un prisma retto con perimetro di base π e altezza 24; per esempio, la base può essere un triangolo equilatero di lato $\frac{\pi}{3}$.
- Un cilindro circolare retto con circonferenza di base 2π (quindi raggio di base 1) e altezza 12.
- Un cono circolare retto con raggio di base 1 e apotema 24.
- …

Quesito 4

Il quesito propone un'interessante questione riguardante le radici multiple di un polinomio di terzo grado. Non sono necessari calcoli complicati, ma occorre una certa abilità per formalizzare la questione in modo opportuno.

Se il numero k è radice doppia del polinomio di terzo grado

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

allora $p(x)$ si può fattorizzare così:

$$p(x) = a(x-k)^2(x-h)$$

essendo h un opportuno numero reale, che risulta essere la terza radice di $p(x)$. La derivata di $p(x)$ è allora

$$p'(x) = 2a(x-k)(x-h) + a(x-k)^2 = a(x-k)(2x-2h+x-k)$$

Poiché $p'(x)$ contiene il fattore $(x-k)$, risulta $p'(k) = 0$, come si voleva dimostrare.
Passiamo al calcolo della derivata seconda.

$$p''(x) = a(2x-2h+x-k) + 3a(x-k) = a(6x-4k-2h);$$

risulta quindi

$$p''(k) = a(6k-4k-2h) = 2a(k-h).$$

Perciò $p''(k) = 0 \Leftrightarrow h = k$, vale a dire se k è *soluzione tripla* di $p(x)$.

Quesito 5

Si debbono provare due identità trigonometriche, ed utilizzarle per provarne una terza. Non essendo specificato quali formule sono da ritenere note, il quesito si può interpretare a livelli di difficoltà molto diversi, secondo le premesse da cui si parte. Sarebbe opportuno, nel formulare quesiti di questo tipo, precisare quali sono le conoscenze assunte per note.

Ammettiamo che sia nota la "formula di duplicazione del coseno" nella forma più consueta:

(1) $$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha;$$

tale formula si ottiene semplicemente calcolando $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha)$ con la formula di addizione per il coseno (cfr.4.15).

Le prime due identità seguono immediatamente, tenendo presente la identità fondamentale

(2) $$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

Possiamo infatti ricavare da (2)

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;$$

Sostituendo questa espressione al posto di $\operatorname{sen}^2\alpha$ nella (1), si ha

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

che è la prima delle due identità da provare.

Se invece da (2) ricaviamo

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$

e sostituiamo in (1) questa espressione al posto di $\cos^2\alpha$, troviamo

$$\cos(2\alpha) = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

che è la seconda identità.

Infine, applichiamo la prima identità che abbiamo dimostrato, cioè

(3) $$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

ponendo 2α al posto di α, e quindi 4α al posto di 2α:

$$\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1$$

Adesso sostituiamo nuovamente $\cos(2\alpha)$ con l'espressione data in (3): si ottiene

$$\cos(4\alpha) = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

che è l'ultima identità di cui era richiesta la verifica.

Il quesito risulta assai più impegnativo se non si vogliono ritenere note le formule di addizione e sottrazione del coseno; la

dimostrazione di tali formule richiede un ragionamento geometrico non del tutto immediato, per il quale rimandiamo ai trattati di trigonometria.

Quesito 6

La risoluzione richiede l'uso del Teorema degli zeri e lo studio della monotonia di una funzione. Il quesito è simile, in forma più semplice, al quesito 10 proposto nella prova ordinaria sperimentale P.N.I., anno scolastico 2002-2003.

Sia $f(x) = x^5 + 10x + 1$. Risulta $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Perciò i valori di f passano da negativi a positivi. f è continua nel suo dominio, che è l'intero asse reale. Per il Teorema degli zeri esiste *almeno* un $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f(x_0) = 0$.
Per provare l'*unicità*, osserviamo che la derivata di f è

$$f'(x) = 5x^4 + 10$$

positiva per ogni $x \in \mathbf{R}$; quindi f è strettamente crescente, e perciò non può assumere il valore zero in più di un punto.
La figura 11 mostra il grafico di f, per illustrare quanto dimostrato sopra.

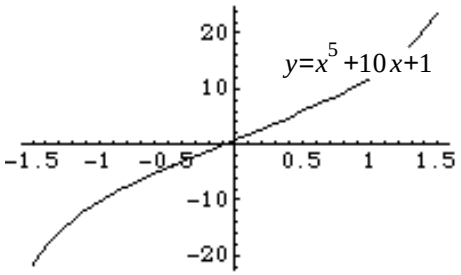


figura 11

Quesito 7

Quesito teorico, chiede di enunciare il teorema di Lagrange e mostrare una sua classica applicazione; questi argomenti figurano in tutti i testi liceali di Analisi Matematica, e dovrebbero essere noti agli studenti.

Il Teorema di Lagrange del valor medio dice che:

Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$, *ed è derivabile nei punti interni dell'intervallo, allora esiste almeno un punto* $c \in]a, b[$ *tale che*

(1) $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

L'applicazione di detto Teorema alla crescenza o decrescenza delle funzioni, a cui accenna il testo, è la seguente proposizione:

Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ *un intervallo;* $f : I \to \mathbf{R}$ *una funzione derivabile in ogni punto dell'intervallo I. Allora*

1) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \ \Rightarrow \ f$ *strettamente crescente in* I;

2) $f'(x) < 0 \ \ \forall\, x \in I \ \Rightarrow \ f$ *strettamente decrescente in* I;

3) $f'(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in I \ \Rightarrow \ f$ *crescente in* I;

4) $f'(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in I \ \Rightarrow \ f$ *decrescente in* I.

Dimostriamo queste quattro implicazioni. È essenziale formulare in modo preciso le definizioni di "funzione strettamente crescente", "strettamente decrescente", "crescente", "decrescente". Ricordiamo queste definizioni[1] .

Si dice che $f : I \to \mathbf{R}$ è:

- *strettamente crescente in* $I \Leftrightarrow \forall\, x_1,\, x_2 \in I \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$;
- *strettamente decrescente in* $I \Leftrightarrow \forall\, x_1,\, x_2 \in I \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$;
- *crescente in* $I \ \Leftrightarrow \ \forall\, x_1, x_2 \in I \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right)$;
- *decrescente in* $I \ \Leftrightarrow \ \forall\, x_1, x_2 \in I \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\right)$.

Dimostriamo dunque la 1). Supponiamo $f'(x) > 0 \ \ \forall\, x \in I$;
prendiamo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Poiché I è un <u>intervallo</u>, tutti i punti compresi fra x_1 e x_2 appartengono a I, cioè $[x_1, x_2] \subseteq I$. Questo dettaglio è essenziale per la dimostrazione: la proposizione in oggetto risulta falsa, se si sopprime l'ipotesi che I sia un intervallo (si veda anche l'esempio alla fine).
Essendo $[x_1, x_2] \subseteq I$ e f derivabile in I, risulta f derivabile in $[x_1, x_2]$, quindi anche continua nel medesimo intervallo. Sono quindi soddisfatte da f in $[x_1, x_2]$ le ipotesi del Teorema di Lagrange. Per tale Teorema, esiste $c \in \left]x_1, x_2\right[$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Per ipotesi risulta $f'(c) > 0$, quindi $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. In questa frazione il denominatore è positivo, perché abbiamo scelto $x_1 < x_2$; affinché la frazione sia positiva, deve quindi essere positivo anche il numeratore: deve quindi essere $f(x_2) - f(x_1) > 0$, cioè $f(x_1) < f(x_2)$, come si voleva dimostrare.

Le dimostrazioni di 2), 3), 4) si svolgono in modo del tutto analogo.

---

[1] Alcuni Autori adottano denominazioni leggermente diverse, definendo "crescente", "decrescente", "non decrescente", "non crescente" quanto noi abbiamo definito (nell'ordine) "strettamente crescente", "strettamente decrescente", "crescente", "decrescente".

A completamento dell'esposizione, mostriamo un esempio di funzione avente come dominio un insieme che non è un intervallo, derivabile, con derivata positiva in tutto il dominio, ma non strettamente crescente nel suo dominio:

$$f:\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[;\quad f(x)=-\frac{1}{x}.$$

La derivata è

$$f'(x)=\frac{1}{x^2};\quad f'(x)>0\ \ \forall\, x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[;$$

tuttavia non è vero che f è strettamente crescente in $\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$. Per esempio, siano $x_1=-1$, $x_2=1$; è $x_1<x_2$, ma $f(x_1)=1$ non è minore di $f(x_2)=-1$.

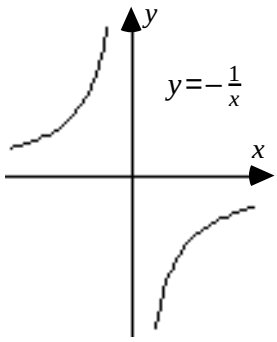


figura 12

È vero invece, conformemente alla proposizione dimostrata sopra, che f è strettamente crescente in ciascuno dei due intervalli $\left]-\infty,0\right[$ e $\left]0,+\infty\right[$, ma non nella loro unione (figura 12).

Quesito 8

La risoluzione del quesito consiste in sostanza nell'applicazione del Teorema fondamentale del Calcolo integrale. Il testo è simile a quello del quesito 1 proposto nella Sessione ordinaria, sperimentazione P.N.I., anno scolastico 2002-2003.

Da $f''(x)=2^x$ segue $f'(x)=\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}+C$ (cfr.5.24), con C costante arbitraria.

Poiché è assegnato il valore $f'(0)=0$, abbiamo $\frac{1}{\ln 2}+C=0$ e quindi $C=-\frac{1}{\ln 2}$. L'espressione di $f'(x)$ è quindi

$$f'(x) = \frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\left(2^x-1\right)$$

Integrando un'altra volta troviamo

$$f(x) = \int \frac{1}{\ln 2}\left(2^x-1\right)dx = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x\right)+K$$

con K nuova costante, il cui valore andiamo a determinare utilizzando il dato $f(0)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$: si ha

$$f(0)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2+K;\quad f(0)=\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2 \Leftrightarrow K=0$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2^x}{\ln 2} - x\right).$$

Quesito 9

Si tratta di un semplice esercizio di integrazione, senza particolari difficoltà.

La parte di piano la cui area dovremo calcolare è delimitata dal grafico di $f(x) = 2e^x - 1$ e dagli assi; è necessario quindi conoscere i punti d'intersezione del grafico con gli assi:

asse y) $x = 0 \Rightarrow y = 2e^0 - 1 = 1$; *punto* $(0,1)$;

asse x) $y = 0 \Rightarrow 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$; *punto* $(-\ln 2, 0)$.

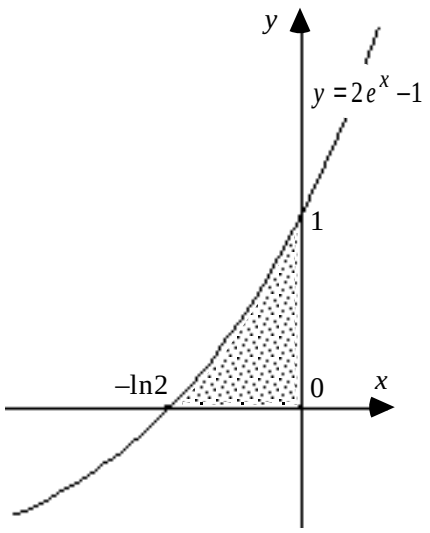


figura 13

La funzione è crescente, quindi la parte di piano che ci interessa è contenuta nel secondo quadrante, con $-\ln 2 \le x \le 0$ (figura 13). Data la semplicità della funzione, non dovrebbe essere necessario effettuare lo "studio" (limiti, derivata, ...) per rendersi conto di quanto osservato sopra; il grafico può essere dedotto da quello di $y = e^x$ mediante una dilatazione di un fattore 2 nella direzione dell'asse *y* e una successiva traslazione di una unità nel verso negativo dell'asse *y*.

In questo modo si risparmia molto tempo.

L'area richiesta è (cfr.5.30, 5.24)

$$Area = \int_{-\ln 2}^{0} \left(2e^x - 1\right) dx = \left[2e^x - x\right]_{-\ln 2}^{0} = 2 - 2e^{-\ln 2} - \ln 2 = 1 - \ln 2,$$

tenendo presente che $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$.

Quesito 10

Si deve riportare la definizione di asintoti, nei vari casi, e un esempio di funzione con caratteristiche prestabilite. La questione non è difficile, ma richiede comunque un po' di fantasia.

Una retta "verticale" (cioè, parallela all'asse delle ordinate, di solito tracciato verticalmente), di equazione $x = x_0$, è asintoto per il grafico

di una funzione *f* se almeno uno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

è infinito.
Affinché ciò possa accadere bisogna che x_0 sia punto di accumulazione per il dominio di *f*.
Una retta non parallela all'asse delle ordinate, di equazione $y = mx + q$, è asintoto per il grafico di *f*, per $x \to -\infty$ o per $x \to +\infty$, se (rispettivamente)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - q \right) = 0 .$$

Ciò significa che la distanza tra il grafico di *f* e la retta $y = mx + q$ tende a zero quando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$.
Se $m \neq 0$ quanto detto sopra definisce un *asintoto obliquo*; se $m = 0$ si ottiene come caso particolare la definizione di asintoto orizzontale (parallelo all'asse delle ascisse), di equazione $y = q$, che ovviamente equivale a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = q \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = q .$$

Affinché il grafico di *f* possa avere un asintoto non parallelo all'asse delle ordinate è necessario che il dominio di *f* sia illimitato (inferiormente o superiormente).

Infine, diamo un esempio di funzione il cui grafico abbia due asintoti verticali e uno orizzontale.
Gli esempi più semplici si trovano fra le *funzioni razionali.* Per esempio la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

(figura 14) ha le proprietà richieste: $x = -1$, $x = 1$ sono i due (unici) asintoti verticali, $y = 0$ l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

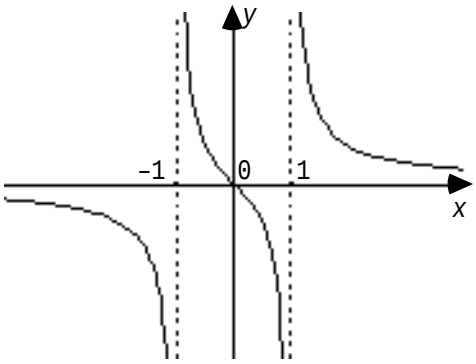


figura 14

Le proprietà del grafico di una funzione razionale sono legate in modo piuttosto semplice a proprietà algebriche dell'espressione della funzione; per questo motivo le funzioni razionali si prestano in molti casi ad esibire esempi di vario tipo.

In particolare ricordiamo che, se $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ è una funzione razionale con $N(x)$ e $D(x)$ polinomi privi di divisori comuni, allora:
I) Se α è una radice di $D(x)$ (e non di $N(x)$, perché in tal caso $N(x)$ e

$D(x)$ avrebbero un divisore comune), allora la retta $x=\alpha$ è un asintoto verticale per il grafico di *f*.
II) Se $grado\ N(x) \leq grado\ D(x)$ allora il grafico di *f* ha un asintoto orizzontale.
III) Se $grado\ N(x) = 1 + grado\ D(x)$ allora il grafico di *f* ha un asintoto obliquo, di equazione $y = Q(x)$, essendo $Q(x)$ il quoziente della divisione di $N(x)$ per $D(x)$.
Tenendo conto di questi fatti si possono trovare tanti altri esempi soddisfacenti alle richieste del presente quesito, e anche a molte altre.