Esame di Stato di Liceo Scientifico

a.s. 2002-2003

P.N.I.

Sessione ordinaria

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t si intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di *versiera di Agnesi* (da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, 1718-1799).

a) Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

b) Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy l'equazione cartesiana di Γ è:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

c) Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

Problema 2.

Sia $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che

- la funzione f sia pari;
- $f(0) = 2$
- $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{3}{2\ln 2}$.

a) Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.

b) Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

c) Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.

d) Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)}\, dx$.

e) Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto ala retta r.

Questionario.

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie a caso una scatola e si estrarre a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

4. Dare un esempio di un polinomio $P(x)$ che tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

5. Dimostrare, usando il Teorema di Rolle [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una

radice dell'equazione:

$$n \cdot x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0.$$

6. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

7. Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando uno dei metodi di integrazione numerica.

8. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.

9. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\operatorname{sen} x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

10. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Leggiamolo insieme

Problema 1

Il problema tratta varie questioni di geometria, ispirandosi a una curva classica, la "versiera" di M.G.Agnesi.
La prima domanda richiede la prova di due proporzioni in una figura geometrica; la seconda chiede l'equazione di un luogo geometrico, la versiera, appunto. Una delle proporzioni provate in precedenza consente di ottenere facilmente l'equazione del luogo; è possibile tuttavia seguire metodi diversi.
Va segnalato il fatto che la scelta del sistema di riferimento è lasciata al candidato; tuttavia tale scelta non è libera, perché il testo assegna l'equazione che si dovrà ottenere. Solo un'attenta analisi di tale equazione permette di stabilire correttamente il sistema di riferimento.
Successivamente va svolto lo studio di funzione, non difficile, per disegnare la curva. Si conclude con il calcolo di un'area, tramite un integrale che non presenta particolari difficoltà.

Che cosa ripassare?

I Teoremi di Euclide. Retta e circonferenza in geometria analitica. I Teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli. Lo studio dei grafici delle funzioni; l'applicazione di integrali e integrali impropri per il calcolo di aree di parti di piano.

Problema 2

Il problema verte soprattutto su questioni di Analisi Matematica. Dopo avere determinato i valori di tre parametri in una funzione, in modo da soddisfare tre condizioni assegnate, si deve studiare la funzione e disegnare il suo grafico; segue la richiesta di risoluzione approssimata di un'equazione (l'equazione è peraltro risolubile in modo esatto, essendo riconducibile ad una equazione esponenziale). Poi si deve calcolare un'area mediante integrale, ed un'ulteriore primitiva. Infine è richiesta l'equazione della simmetrica della curva studiata sopra, rispetto ad una retta data.

Che cosa ripassare?

I metodi per lo studio delle funzioni e dei loro grafici, con particolare riguardo per le funzioni esponenziali, e le formule ad esse relative per la derivazione e l'integrazione. I metodi per la risoluzione approssimata di equazioni. Integrazione per sostituzione. Equazioni delle simmetrie assiali nel piano.

Soluzione del problema 1

Domanda *a*): verifica delle proporzioni indicate nel testo.

Mostriamo che valgono le proporzioni indicate, incominciando dalla prima.
I triangoli rettangoli *ODB*, *OAC* (vedi figura 1) sono simili, avendo in comune l'angolo acuto con vertice in *O*. Perciò si ha

(1) $$OD : DB = OA : AC.$$

Poiché $AC = DP$, in quanto lati opposti di un rettangolo, da (1) segue subito

$$OD : DB = OA : DP$$

che è la prima delle due proporzioni che si volevano dimostrare.

Passiamo alla seconda. L'angolo $A\hat{B}O$ è retto, perché insiste su un diametro di γ; perciò *AB* è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo *OAC*. Applicando il primo Teorema di Euclide (cfr.2.8) a detto triangolo si ha

(2) $$OC : AC = AC : BC$$

da cui, osservando nuovamente che $AC = DP$, segue

$$OC : DP \;=\; DP : BC$$

come volevamo dimostrare.

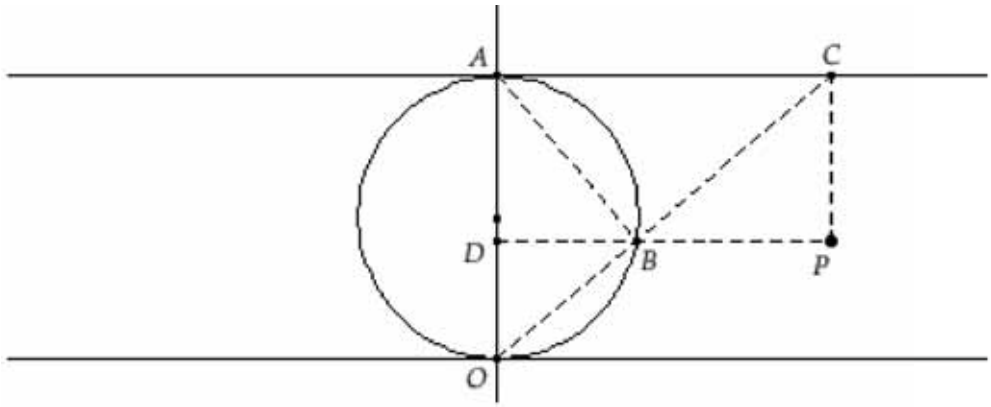


figura 1

Domanda *b*): scelta del sistema di riferimento e calcolo dell'equazione del luogo geometrico in oggetto.

La parte più difficile di questa domanda è la scelta "opportuna" del sistema di riferimento; si tratta di una scelta vincolante, perché se scegliamo il sistema di riferimento diversamente dall'autore dell'esercizio, anche procedendo correttamente non troveremo l'equazione annunciata.

Con una deduzione niente affatto "scientifica" possiamo azzardare la scelta del punto O come origine, in quanto tale lettera è spesso usata per indicare l'origine degli assi; poi è naturale fare in modo che A si trovi su uno degli assi; poniamolo sull'asse y, in modo che le coordinate di A siano $(0, a)$.

Questa scelta del sistema di riferimento si rivela corretta; essa è altresì deducible con un ragionamento più ortodosso:

La costruzione geometrica di Γ fa capire che la curva è simmetrica rispetto alla retta OA; l'equazione $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ rappresenta una curva simmetrica rispetto all'asse y; quindi l'asse y deve contenere OA.

Quando la retta r coincide con OA, il punto P coincide con A; quindi Γ passa per A. Abbiamo già osservato che A si trova sull'asse y, quindi ha ascissa 0. Il punto di ascissa 0 della curva $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ è $(0, a)$; allora il sistema di riferimento deve essere tale che A abbia coordinate $(0, a)$.

Infine, dalla costruzione geometrica di Γ si evince che Γ ha come asintoto la retta tangente in O alla circonferenza γ; la curva

$y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ ha come asintoto l'asse x perché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2} = 0$; perciò l'asse x coincide con la tangente a γ in O, quindi O è l'origine del sistema di riferimento.

Determiniamo ora l'equazione di Γ rispetto a questo sistema di riferimento.
Sono possibili diversi procedimenti; di seguito ne esponiamo tre.

1) Applicazione delle proporzioni provate in *a*).

Siano (x, y) le coordinate di un punto $P \in \Gamma$. Le misure dei segmenti OD, DB, OA, DP che formano la prima proporzione sono:

$$\overline{OD} = y \; ; \quad \overline{DB} = \sqrt{ay - y^2} \; ; \quad \overline{OA} = a \; ; \quad \overline{DP} = |x|$$

($\overline{DB}$ si ottiene applicando il secondo Teorema di Euclide (cfr.2.9) al triangolo rettangolo OBA, nel quale DB è l'altezza relativa all'ipotenusa).
La proporzione

$$OD : DB = OA : DP$$

equivale a

$$\overline{OD} \cdot \overline{DP} = \overline{DB} \cdot \overline{OA}$$

cioè, sostituendo i rispettivi valori,

$$y \cdot |x| = \sqrt{ay - y^2} \cdot a.$$

Ora eleviamo al quadrato entrambi membri, che sono positivi:

$$x^2 y^2 = a^3 y - a^2 y^2.$$

Semplifichiamo il fattore comune y; ciò è lecito perché nessun punto di Γ appartiene all'asse y:

$$x^2 y = a^3 - a^2 y$$

Infine ricaviamo y in funzione di x:

$$\left(x^2 + a^2\right) y = a^3 \; ; \qquad y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

come si voleva dimostrare.
Un analogo calcolo basato sulla seconda proporzione conduce a calcoli assai più laboriosi, e non risulta quindi conveniente.

2) Procedimento con le tecniche della geometria analitica.

Realizziamo il procedimento di costruzione di Γ nel sistema di riferimento che abbiamo scelto.
Osserviamo che in questo sistema gli elementi iniziali della costruzione sono rappresentati dalle seguenti equazioni:

$$\textit{retta } t)\ \ y = a \qquad\qquad \textit{circonferenza } \gamma)\ \ x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Consideriamo una generica retta *r* passante per l'origine, non parallela a *t*:

$$r)\ \ y = mx \quad \text{con } m \neq 0.$$

Il punto *C* si ottiene dal sistema fra le equazioni di *t* e di *r*; il punto *B* si ottiene dal sistema fra le equazioni di γ e di *r*. Osserviamo inoltre che le coordinate di *P*, oggetto della nostra ricerca, sono

$$P\left(x_C, y_B\right)$$

cosicché, da detti sistemi è necessario ricavare soltanto l'*ascissa* di *C* e l'*ordinata* di *B*.

Incominciamo da *C*:

$$\begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow\ mx = a\ \Rightarrow\ x = \frac{a}{m}\left(= x_C = x_P\right)$$

Passiamo a *B*:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{m^2} + y^2 - ay = 0 \\ x = \dfrac{y}{m} \end{cases};$$

Nell'equazione $\frac{y^2}{m^2} + y^2 - ay = 0$ è lecito semplificare il fattore *y*, perché la soluzione $y = 0$ corrisponde al punto *O*, e non a *B*. Così abbiamo

$$y\left(\frac{1}{m^2} + 1\right) - a = 0;\quad y = \frac{m^2 a}{1 + m^2} \quad \text{quindi} \quad y_B = y_P = \frac{m^2 a}{1 + m^2}.$$

Le coordinate di *P* sono dunque, in funzione di *m*,

$$P\left(\frac{a}{m}, \frac{m^2 a}{1 + m^2}\right)$$

ovvero, un sistema di equazioni parametriche per Γ è

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{m^2 a}{1+m^2} \end{cases}$$

L'equazione cartesiana di Γ si ottiene eliminando il parametro:

$$m = \frac{a}{x}\ \left(\text{dalla prima equazione}\right);\quad y = \frac{\frac{a^2}{x^2} a}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Abbiamo così ritrovato l'equazione di Γ.

Occorre fare attenzione alla divisione per *x* effettuata per ricavare *m*:

essa obbliga a richiedere che sia $x \neq 0$; questa restrizione è solamente provvisoria; infatti l'equazione $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ non richiede questa limitazione, ed il punto $(0, a)$ che si ottiene per $x = 0$ appartiene effettivamente a Γ: esso si ottiene quando r coincide con l'asse y.

3) Procedimento con metodi trigonometrici.

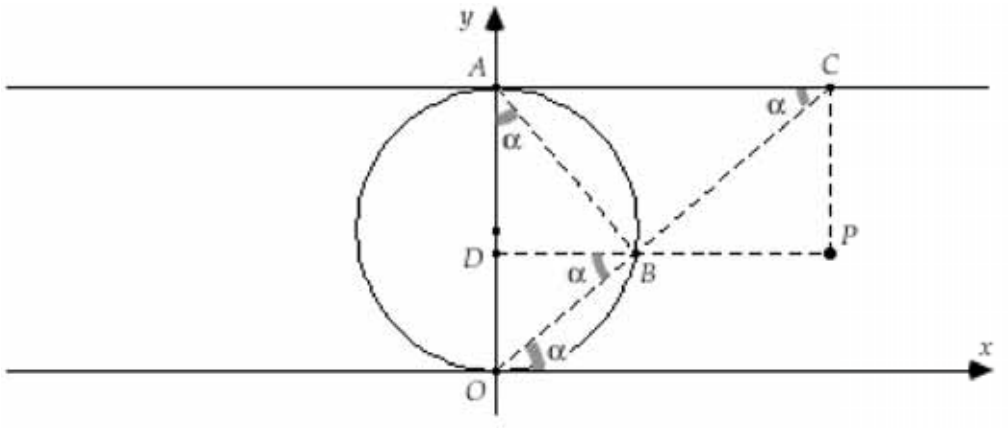


figura 2

Indichiamo con α l'angolo formato da r con il semiasse positivo delle ascisse $(0 < \alpha < \pi)$. Possiamo limitarci a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, osservando che Γ è simmetrica rispetto all'asse y. Notiamo che sono uguali ad α gli angoli $O\hat{B}D$ e $O\hat{C}A$, perché alterni interni dell'angolo in O rispetto a coppie di rette parallele tagliate da r, ed è uguale ad α anche $O\hat{A}B$, perché complementare di $A\hat{O}B$.
Applicando i Teoremi sui triangoli rettangoli (cfr.4.47 e 4.44) abbiamo

$$x_P = \overline{AC} = \overline{OA}\,\mathrm{ctg}(O\hat{C}A) = \overline{OA}\,\mathrm{ctg}\,\alpha = a\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha};$$

$$\overline{OB} = \overline{OA}\,\mathrm{sen}(O\hat{A}B) = a\,\mathrm{sen}\,\alpha; \qquad y_P = \overline{OD} = \overline{OB}\,\mathrm{sen}\,\alpha = a\,\mathrm{sen}^2\alpha$$

Abbiamo così ottenuto un altro sistema di equazioni parametriche di Γ, in funzione del parametro α:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} \\ y = a\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{cases}$$

Come prima, per ottenere l'equazione cartesiana di Γ occorre eliminare il parametro. La tecnica più semplice consiste nel ricavare

le espressioni di $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ in funzione di x e y, e infine scrivere la relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Da $y = a\operatorname{sen}^2\alpha$ ricaviamo

(2) $$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{y}{a};$$

dalla prima di (1) abbiamo

$$x = a\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow x^2 = a^2\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{x^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Ora sostituiamo $\operatorname{sen}^2\alpha$ con l'espressione ottenuta in (2); si ottiene

(3) $$\cos^2\alpha = \frac{x^2 y}{a^3}.$$

Infine sommiamo membro a membro la (2) e la (3); la somma dei primi membri è uguale a 1, cosicché otteniamo

$$1 = \frac{y}{a} + \frac{x^2 y}{a^3}; \quad y\frac{a^2 + x^2}{a^3} = 1; \quad y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

ed ecco nuovamente l'equazione di Γ.

Domanda *c*): studio e disegno di Γ e calcolo dell'area.

Il disegno di Γ si ottiene studiando la semplice funzione

$$f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

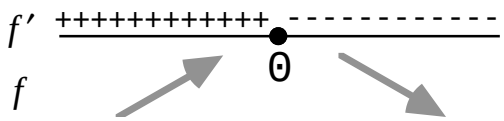
La funzione è definita in $]-\infty, +\infty[$, è sempre positiva e pari; infatti Γ, come già più volte osservato, è simmetrica rispetto all'asse y.

Risulta poi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, cosicché l'asse delle ascisse è asintoto per il grafico di f sia per $x \to -\infty$, sia per $x \to +\infty$.

La derivata è

$$f'(x) = \frac{-2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}$$

il cui segno varia come sotto indicato, con le conseguenze pure indicate sulla crescenza e decrescenza di f.

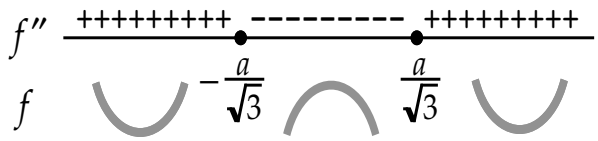


f ha un massimo relativo ed assoluto per $x = 0$; il valore di f in questo punto è $f(0) = a$.

La derivata seconda è

$$f''(x) = a^3 \cdot \frac{-2\left(a^2+x^2\right)^2 + 2x \cdot 2\left(a^2+x^2\right) \cdot 2x}{\left(a^2+x^2\right)^4} = \frac{2a^3\left(3x^2-a^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^3}$$

il cui segno varia come sotto indicato, con le conseguenze pure indicate sulla convessità e concavità di *f*.



Si nota che Γ ha due flessi, di ascisse $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ e ordinata, per entrambi, $f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}a$.

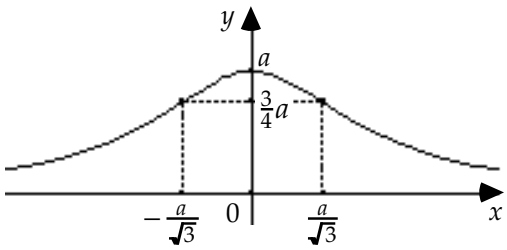


figura 3

Il grafico di *f*, cioè la curva Γ, è rappresentato nella figura 3 (ma si trova anche nelle figure precedenti).

Passiamo al calcolo dell'area della parte di piano compresa fra Γ e il suo asintoto, cioè l'asse *x*. Poiché *f* è pari (cfr.5.1), l'area è uguale al doppio dell'area contenuta nel semipiano $x \geq 0$; tenendo conto anche del fatto che *f* è sempre positiva avremo:

$$Area = 2\int_0^{+\infty} \frac{a^3}{a^2+x^2}dx = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{a^3}{a^2+x^2}dx =$$

$$= 2a^3 \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}dx = 2a^3 \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^b \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\cdot\frac{1}{a}dx =$$

$$= (\text{cfr.5.24}) \quad 2a^3 \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \pi a^2,$$

tenendo presente che $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$ e che $\operatorname{arctg}(0) = 0$.

L'area del cerchio γ, il cui raggio misura $\frac{a}{2}$, è invece uguale a $\frac{\pi a^2}{4}$; è così verificato che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quadrupla di quella del cerchio.

Soluzione del problema 2

Domanda *a*): determinazione del valore dei parametri

Dalle tre condizioni assegnate dal testo dobbiamo dedurre tre equazioni da cui ricavare i valori di *a*, *b*, *c*.

1) f <u>pari</u> significa che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta $f(-x) = f(x)$, cioè

$$a \cdot 2^{-x} + b \cdot 2^{x} + c = a \cdot 2^{x} + b \cdot 2^{-x} + c\,; \quad (a-b) \cdot 2^{-x} + (b-a) \cdot 2^{x} = 0\,;$$

$$(a-b)\left(2^{-x} - 2^{x}\right) = 0\,.$$

Desideriamo che quest'ultima uguaglianza sia vera per ogni valore di x. Poiché il fattore $\left(2^{-x} - 2^{x}\right)$ non è identicamente nullo, bisogna che sia

(1) $$a - b = 0\,.$$

2) Risulta $f(0) = a + b + c$. La condizione $f(0) = 2$ fornisce quindi

(2) $$a + b + c = 2.$$

3) Per il calcolo di una primitiva di f occorre conoscere una primitiva di 2^{x}. Questa è $\frac{2^{x}}{\ln 2}$ (cfr.5.24); di conseguenza, $\int 2^{-x}\,dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}$, e

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{\ln 2}\left(a \cdot 2^{x} - b \cdot 2^{-x}\right) + c\,x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{2\ln 2} + c\,.$$

Deve quindi essere

(3) $$\frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{2\ln 2} + c = \frac{3}{2\ln 2}.$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni (1), (2) e (3) ricaviamo i valori di *a*, *b*, *c*. Svolgiamo il calcolo.

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b + c = 2 \\ \dfrac{a}{\ln 2} + \dfrac{b}{2\ln 2} + c = \dfrac{3}{2\ln 2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} b = a \\ c = 2 - 2a \\ \dfrac{3a}{2\ln 2} + 2 - 2a = \dfrac{3}{2\ln 2} \end{cases};$$

la terza equazione diventa:

$$3a + 4\ln 2 - 4a\ln 2 = 3\,; \quad a\left(3 - 4\ln 2\right) = 3 - 4\ln 2\,; \quad a = 1\,.$$

Pertanto

$$\begin{cases} b = a \\ c = 2 - 2a \\ a = 1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} b = 1 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Adesso non resta che sostituire i valori i *a*, *b*, *c* nell'espressione di $f(x)$, per ottenere

$$\boxed{f(x) = 2^x + 2^{-x}}.$$

Domanda *b*): studio e grafico di *g*.

Senza alcun motivo, il nome della funzione non è più *f*, bensì *g*. Questo non cambia nulla, naturalmente: si tratta della $f(x)$ scritta poche righe più in alto.

Il dominio di *g* è $]-\infty, +\infty[$; la funzione è pari, come osservato in ***a)***, quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; inoltre $f(0) = 2$.

La funzione assume valori positivi in tutto il dominio, perché entrambi gli addendi sono sempre positivi.

Poiché risulta, per $a > 1$, $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ (cfr.6.9), si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2^x + 2^{-x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(2^x + 2^{-x}\right) = +\infty.$$

Il grafico non ha asintoti obliqui perché la crescita di $g(x)$ è di tipo esponenziale, quindi più rapida di quella di un polinomio di primo grado. Ci si può accertare di ciò con il calcolo seguente; la sigla «*H*» indica l'applicazione del Teorema di de l'Hôpital, nella versione appropriata (cfr.5.22).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2}{1} = +\infty$$

Con analogo calcolo si vede che $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$.

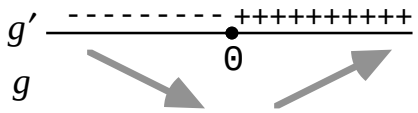
La derivata è

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \left(2^x - 2^{-x}\right) \ln 2.$$

Risulta

$$g'(x) > 0 \iff 2^x > 2^{-x} \iff x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0.$$

Il segno di $g'(x)$ varia dunque come indicato dal seguente schema, con le conseguenze ivi riportate sulla crescenza e decrescenza di *g*.



0 è punto di minimo relativo per g; il valore del minimo, già precedentemente calcolato, è 2.
Infine calcoliamo la derivata seconda:

$$g'(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 2^{-x}(\ln 2)^2 = \\ = \left(2^x + 2^{-x}\right)(\ln 2)^2.$$

Si osserva che $g''(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
pertanto g è *convessa* nel suo dominio.

Il grafico di g è disegnato nella figura 4.

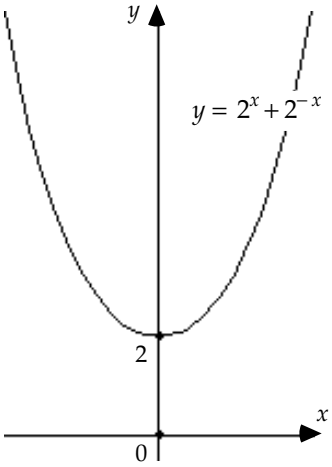


figura 4

Domanda *c*): risoluzione approssimata dell'equazione $g(x) = 4$.
Le coordinate dei punti comuni alla retta r di equazione $y = 4$ e al grafico G della funzione g sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = 2^x + 2^{-x} \end{cases}$$

Le ascisse di tali punti sono le soluzioni dell'equazione risolvente

(4) $$2^x + 2^{-x} - 4 = 0.$$

Poiché il minimo valore assunto da g è $g(0) = 2$, e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, ci sono due valori di x, uno positivo e uno negativo, che soddisfano la (4); ce ne sono *esattamente* due, perché g è decrescente in $]-\infty, 0]$, crescente in $[0, +\infty[$.
Infine, poiché g è una funzione *pari*, le due soluzioni di (4) sono una opposta dell'altra.
Osserviamo subito che l'equazione (2) può essere risolta in modo esatto; svolgiamo sui i calcoli necessari; i risultati risulteranno utili nella risoluzione del successivo punto ***d*)**.
Nella (4) poniamo $t = 2^x$, cosicché $2^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t}$. La (4) diventa:

$$\boxed{t + \frac{1}{t} - 4 = 0\,; \quad \frac{t^2 - 4t + 1}{t} = 0\,; \quad t = 2 \pm \sqrt{3}}$$

Abbiamo così due equazioni esponenziali elementari

$$2^x = 2 - \sqrt{3} \text{ da cui } x = \log_2\left(2 - \sqrt{3}\right);$$
$$2^x = 2 + \sqrt{3} \text{ da cui } x = \log_2\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

OSSERVAZIONI.

1) Se interessa un'approssimazione decimale delle due soluzioni, per valutare con la calcolatrice le espressioni calcolate sopra occorre servirsi della formula per il cambiamento di base dei logaritmi, perché la calcolatrice dispone soltanto dei logaritmi in base *e* e 10, rispettivamente *ln* e *log*. Si ha:

$$\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) = \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\ln 2} = \frac{1,3169\ldots}{0,6931\ldots} = 1,8999686\ldots;$$

$$\log_2\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{\ln 2} = \frac{-1,3169\ldots}{0,6931\ldots} = -1,8999686\ldots.$$

2) la calcolatrice conferma che le soluzioni sono una opposta dell'altra, come previsto in base alla parità di *g*. Una verifica diretta di ciò, senza l'ausilio della calcolatrice, consiste nel fatto che

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 4-3 = 1;$$

perciò $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, e quindi tenendo presenti le proprietà dei logaritmi (cfr.6.16), si ha

$$\ln\left(2-\sqrt{3}\right) = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

come suggeriva il risultato della calcolatrice; osserviamo peraltro che il risultato della calcolatrice non costituisce in nessun caso una prova certa di una relazione fra due numeri, perché i valori che essa fornisce sono sempre approssimazioni con un numero finito di cifre, di numeri in generale decimali illimitati.

Ritorniamo all'argomento di questa domanda: la valutazione approssimata delle soluzioni di (4).

Occupiamoci della soluzione positiva, sia x^*.

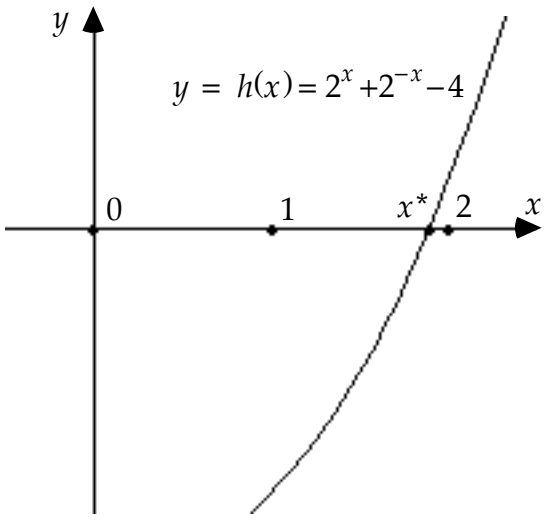


figura 5

Possiamo ottenere una sua approssimazione mediante il *metodo di bisezione.* Occorre innanzitutto un intervallo che contiene x^* (e nessun'altra soluzione dell'equazione). Chiamiamo

$$h(x) = g(x) - 4 = 2^x + 2^{-x} - 4$$

cosicché la (4) si scrive

(5) $\qquad h(x) = 0.$

Poiché risulta

$$h(1) = -\tfrac{3}{2} < 0\,; \qquad h(2) = \tfrac{1}{4} > 0$$

x^* deve trovarsi fra 1 e 2; in

questo intervallo x^* è l'unica soluzione di (5) perché h è strettamente crescente.
Poniamo $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, ed applichiamo il metodo di bisezione come descritto nello svolgimento del Quesito 2, Sessione Suppletiva P.N.I., Anno Scolastico 1999-2000. Si calcolano i dati della seguente tabella:

n	a_n	b_n	m_n	$h(a_n)$	$h(b_n)$	$h(m_n)$	$b_n - a_n$
0	1	2	1,5	−	+	−	1,000
1	1,5	2	1,75	−	+	−	0,500
2	1,75	2	1,875	−	+	−	0,250
3	1,875	2	1,9375	−	+	+	0,125
4	1,875	1,9375	1,90625	−	+	+	0,0625
5	1,875	1,90625	1,89063	−	+	−	0,03125

La scelta di arrestare il procedimento dopo cinque iterazioni è arbitraria, poiché il testo non contiene l'indicazione della precisione richiesta.
Poiché in $m_5 = 1,89063$ h assume valore negativo, mentre in $b_5 = 1,90625$ h è positiva, concludiamo che

$$\boxed{1,89063 < x^* < 1,90625}$$

Per ottenere una precisione migliore avremmo dovuto aumentare il numero di iterazioni del metodo, oppure utilizzare un metodo più efficiente, come il metodo di Newton delle tangenti; anche di tale metodo è data spiegazione nello svolgimento del Quesito 2, Sessione Suppletiva P.N.I., Anno Scolastico 1999-2000; un'applicazione del metodo di Newton figura anche nello svolgimento del Quesito 10 del Questionario del presente compito.

Domanda *d*): calcolo dell'area richiesta.

La parte di piano delimitata dalla retta r di equazione $y = 4$ e dal grafico G della funzione

$$g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

ha le ascisse limitate tra $-x^*$ e x^*, soluzioni dell'equazione $g(x) = 4$.
Queste si calcolano come spiegato nel precedente punto ***c)***, e valgono, come si è visto, $\pm\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)$.

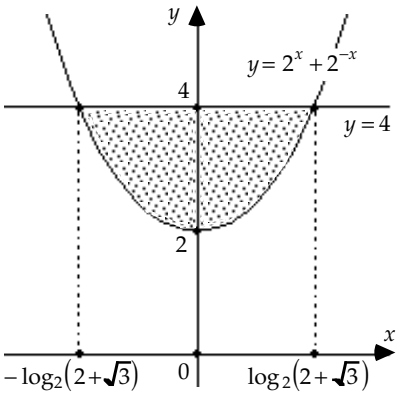


figura 6

Nel calcolo si può tenere presente che, grazie alla simmetria della figura rispetto all'asse y, l'area

cercata è il doppio della parte che si trova nel semipiano $x \geq 0$.
L'area richiesta è data da (cfr.5.30, 5.24)

$$Area = 2\int_0^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} \left(4 - 2^x - 2^{-x}\right) dx = 2\left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^{\log_2\left(2+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= 2\left(4\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{2+\sqrt{3}}{\ln 2} + \frac{2-\sqrt{3}}{\ln 2}\right) = 4\left(2\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\right)$$

(nel secondo passaggio abbiamo utilizzato le identità $2^{\log_2 a} = a$, vera per ogni $a > 0$, $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ e $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$).

$$\boxed{Area = 4\left(2\log_2\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\right)}$$

Domanda *e*): calcolo di una primitiva di $\frac{1}{g(x)}$.

Si può scrivere

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{2^x + 2^{-x}} dx = \int \frac{2^x}{2^{2x} + 1} dx.$$

Poiché il numeratore differisce per una costante ($\ln 2$) dalla derivata di 2^x, appare opportuna la sostituzione di variabile $t = 2^x$; ne segue $dt = 2^x \ln 2\, dx$ e quindi

$$\int \frac{2^x}{2^{2x} + 1} dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \ln 2}{2^{2x} + 1} dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg}\left(2^x\right).$$

Le altre primitive di $\frac{1}{g(x)}$ si ottengono addizionando a questa una arbitraria costante:

$$\boxed{\int \frac{1}{g(x)} dx = \frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg}\left(2^x\right) + C}$$

Domanda *f*): grafico simmetrico di *G* rispetto a *r*.

La scelta fatta nel testo di indicare con g' qualche cosa che non è la derivata di g è quanto mai infelice, perché può dare luogo a malintesi; indicheremo la funzione richiesta con g_1, anziché g'.
La simmetria assiale rispetto alla retta r, $y = 4$, ha equazioni (cfr.3.79)

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 8 - y \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = X \\ y = 8 - Y \end{cases}$$

Il grafico *G*, di equazione $y = g(x)$ viene trasformato nella curva di equazione

$$8 - Y = g(X)\,; \quad Y = 8 - g(X)$$

ossia, ritornando alle lettere minuscole per le variabili,

$$y = 8 - \left(2^x + 2^{-x}\right)\,; \;\; y = 8 - 2^x - 2^{-x}.$$

Perciò

$$\boxed{g_1(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}}\,.$$

Le due curve, *G* la sua simmetrica rispetto alla retta $y = 4$ sono disegnate nella figura 7.

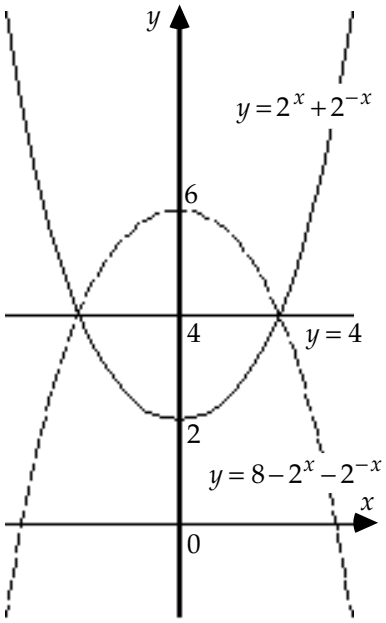


figura 7

Questionario

Quesito 1

È un esercizio di calcolo combinatorio, di facile risoluzione. Il riferimento, forse inopportuno, ad un contesto concreto molto vicino all'esperienza di numerosi studenti può avere causato risposte non bene motivate, dovute alla conoscenza diretta degli eventi.

Il numero di partite da giocarsi è uguale al numero di coppie *ordinate* di due elementi scelti da un insieme di 18 elementi. Occorrono coppie <u>ordinate</u> perché, dovendosi disputare sia le partite di "andata" sia quelle di "ritorno", le coppie (ad esempio) (*Bologna, Milan*) e (*Milan, Bologna*) vanno tenute distinte.
Si tratta quindi di calcolare il numero di *disposizioni semplici* di 18 elementi a 2 alla volta. Il risultato è (cfr.1.16)

$$D_{18,2} \;=\; 18 \cdot 17 \;=\; 306\,.$$

Questa è la più semplice risoluzione del presente problema, fondata solamente sui dati forniti dal testo.

Chi si interessa di calcio può ottenere il risultato per altra via, essendo informato sul fatto che il campionato italiano di calcio si disputa in 34 giornate, in ciascuna delle quali vengono giocate 9 partite: complessivamente $34 \cdot 9 = 306$ partite. Il risultato è esatto, ma non è motivato da un ragionamento di tipo matematico, eventualmente applicabile ad un caso più generale, bensì fa leva su

una conoscenza pratica.
Il ragionamento combinatorio esposto sopra vale qualunque sia il numero di squadre: se le squadre sono n, il numero complessivo di partite da giocare è

$$D_{n,2} = n(n-1)$$

mentre il calcolo *a priori* del numero di giornate di campionato è meno immediato, specialmente se il numero n di squadre partecipanti è dispari, cosicché in ogni giornata una squadra riposa.

Un ragionamento più complicato ma ugualmente corretto per ricavare il risultato, può essere il seguente:
Indichiamo le n squadre con $s_1, s_2, \ldots, s_n$.
Nel girone di andata,

- s_1 dovrà disputare $n-1$ partite, contro ciascuna delle altre squadre;
- s_2 dovrà disputare a sua volta $n-1$ partite; ma quella contro s_1 è già stata contata; teniamo quindi conto di $n-2$ partite
- s_3 dovrà disputare $n-3$ partite, oltre a quelle contro s_1 e s_2 di cui si è già tenuto conto sopra;
- …
- s_{n-1} ha una sola partita ancora non conteggiata: quella contro s_n;
- le partite in cui figura s_n sono già state tutte conteggiate.

Così, le partite che si disputano nel girone di andata sono:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1+0 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

(L'espressione del risultato, $\frac{(n-1)n}{2}$, è frutto dell'applicazione della nota formula $\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$, con $m = n-1$. Una dimostrazione (per induzione) di detta formula è esposta nella soluzione del quesito 7 del compito della Sessione Ordinaria 2002-2003 per i corsi tradizionali).
Altrettante partite saranno giocate nel girone di ritorno; complessivamente si giocano $(n-1)n$, come avevamo già ricavato.

Quesito 2

È un esercizio di Calcolo delle Probabilità, risolubile mediante l'applicazione dei Teoremi della Probabilità Totale e della Probabilità Composta. Va osservato che alcuni dati (il numero di lampadine contenute in ciascuna scatola) sono superflui; ciò potrebbe mettere in difficoltà qualche studente.

Indichiamo con A, (ovvero B, C) rispettivamente, gli eventi

«*si sceglie la scatola A*» (rispettivamente: la scatola B, la scatola C).

La frase del testo "si sceglie una scatola a caso" lascia intendere che ciascuna scatola abbia la stessa probabilità di essere scelta; quindi

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Sia D l'evento

«*la lampadina scelta è difettosa*».

Il testo assegna le probabilità di D condizionate ad A, B, C:

$$P(D|A) = \frac{5}{100}\ ; \qquad P(D|B) = \frac{20}{100}\ ; \qquad P(D|C) = \frac{10}{100}.$$

Si ha

$$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$$

ed i tre eventi fra parentesi sono a due a due *incompatibili* (cioè, il verificarsi di uno di essi assicura che non si verificano gli altri).
Perciò il Teorema della probabilità totale (cfr.7.4) assicura che

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C).$$

Ciascuno dei tre addendi al secondo membro si calcola in base ai dati, applicando il Teorema della Probabilità Composta (cfr.7.5):

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(D|C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{35}{300} = \frac{7}{60} = 0{,}11666\ldots\ .$$

Quesito 3

È un classico problema di massimo, in geometria dello spazio. Può essere risolto in modi diversi, senza significative difficoltà. Al termine occorre prestare attenzione a non commettere grossolani errori nel convertire le misure di volume in misure di capacità, nella fattispecie centilitri, *come richiesto.*
È possibile impostare la risoluzione anche servendosi della trigonometria; questo metodo rende tuttavia più complicata la valutazione dei risultati.

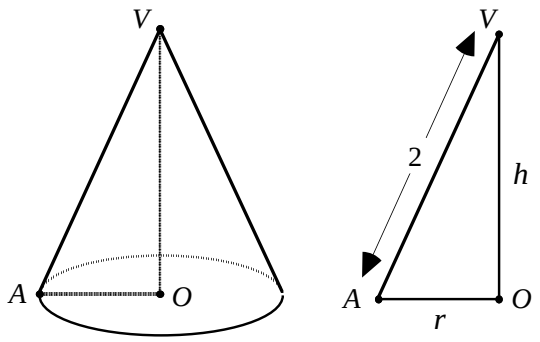


figura 8

Indicati con r e h rispettivamente il raggio di base e l'altezza del cono, il suo vo-lume è dato da (cfr.2.58)

(1) $\quad Volume\,cono = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

La conoscenza dell'apotema $\overline{AV} = 2$ dm stabilisce un legame fra *r* e *h*, dato dal Teorema di Pitagora:

$$r^2 + h^2 = 2^2 = 4$$

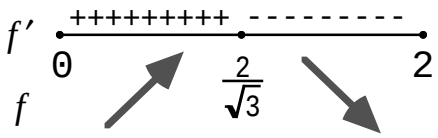
(omettiamo qui l'indicazione delle unità di misura).
Da questa relazione si possono indifferentemente ricavare *r* in funzione di *h*, oppure *h* in funzione di *r*; tenendo presente che l'espressione che ricaveremo va sostituita nella (1) si nota come sia conveniente ricavare $r^2 = 4 - h^2$; in questo modo otteniamo da (1) un'espressione del volume in funzione di *h*, priva di radici, che invece apparirebbero facendo l'altra scelta. Procedendo come detto otteniamo

$$Volume\,cono \;=\; \tfrac{1}{3}\pi\left(4 - h^2\right)h \;=\; \tfrac{1}{3}\pi\left(4h - h^3\right) \;\equiv\; f(h).$$

L'intervallo in cui *h* può variare si ottiene osservando che *h* deve essere positivo, ed anche $r^2 = 4 - h^2$ deve essere positivo; quindi $h \in [0,2]$.
Altrimenti si può osservare che *h* è la misura di un cateto di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura 2; ne segue $h \in [0,2]$.
Quando $h = 0$ oppure $h = 2$ risulta $f(h) = 0$; questo corrisponde all'evidenza geometrica: il cono è ridotto a un disco quando $h = 0$, ad un segmento quando $h = 2$.
La derivata di *f* è

$$f'(h) \;=\; \tfrac{1}{3}\pi\left(4 - 3h^2\right)$$

il cui segno varia, quando $h \in [0,2]$, come indicato nel seguente schema, con le conseguenze ivi specificate sulla crescenza o decrescenza della funzione.



Il cono di volume massimo si ottiene dunque per $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$; il corrispondente volume vale

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \;=\; \tfrac{1}{3}\pi\left(4 - \tfrac{4}{3}\right)\frac{2}{\sqrt{3}} \;=\; \frac{16\pi}{9\sqrt{3}} \;=\; \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Poiché le misure di lunghezza sono date in dm, il volume è espresso in dm^3, equivalenti a *litri*.

La capacità in *centilitri* si ottiene moltiplicando per 100 questo numero: essa vale

$$\frac{1600\pi\sqrt{3}}{27}\,\text{cl} \;\cong\; 322{,}45\,\text{cl}.$$

Seconda risoluzione, mediante la trigonometria.

Indichiamo con α l'angolo $O\hat{A}V$; si ha allora (cfr.4.45, 4.44)

$$r = \overline{AO} = \overline{AV}\cos\alpha = 2\cos\alpha\,;$$
$$h = \overline{VO} = \overline{AV}\,\text{sen}\,\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha$$

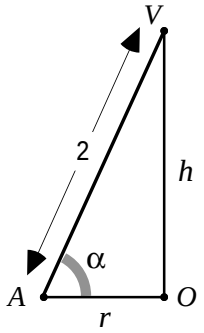


figura 9

cosicché, sostituendo in (1), abbiamo

$$Volume\,cono \;=\; \frac{1}{3}\pi\cdot 4\cos^2\alpha\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha \;=$$
$$= \;\frac{8}{3}\pi\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha \;\equiv\; g(\alpha)$$

con $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, essendo α un angolo acuto di un triangolo rettangolo.

Si ha $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; poi è

$$g'(\alpha) \;=\; \frac{8}{3}\pi\left(-2\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha+\cos^3\alpha\right) \;=\; \frac{8}{3}\pi\cos^3\alpha\left(1-2\,\text{tg}^2\alpha\right)$$

(l'ultimo passaggio comporta che sia $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$; questo non crea difficoltà).

Per $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ il segno di $g'(\alpha)$ è lo stesso di $1-2\,\text{tg}^2\alpha$, perché $\cos\alpha>0$ in tale intervallo; per $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ è

$$1-2\,\text{tg}^2\alpha>0 \Leftrightarrow 0\le\alpha<\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Il massimo di $g(\alpha)$ in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ è quindi assunto per $\alpha=\text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\equiv\alpha_0$;

il corrispondente volume massimo del cono è

$$g(\alpha_0) \;=\; \frac{8}{3}\pi\cos^2\alpha_0\,\text{sen}\,\alpha_0\,.$$

Per valutare questa quantità si può utilizzare direttamente una calcolatrice (con una certa attenzione!), oppure fare uso delle formule che esprimono coseno e seno in funzione della tangente (cfr.4.12) tenendo presente che nel caso attuale $\cos\alpha_0$ e $\text{sen}\,\alpha_0$ sono positivi. Poiché $\text{tg}\,\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ si ottiene

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ ; \qquad \operatorname{sen}\alpha_0 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e quindi

$$\textit{Volume massimo} \ = \ g(\alpha_0) \ = \ \frac{8}{3}\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \ = \ \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

come avevamo ottenuto in precedenza (più semplicemente), con l'altro metodo.

Quesito 4

Si tratta di un esercizio elementare, che praticamente non richiede calcoli per la risoluzione; tuttavia occorre un po' di fantasia per avere l'idea giusta.

Prima di esporre la semplice risoluzione, cerchiamo di inquadrare bene il problema ricordando alcune nozioni fondamentali.
Un *polinomio* di grado n in una variabile x è un'espressione della forma

$$p(x) \ = \ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.
La determinazione di un $p(x)$ avente determinate proprietà consiste in effetti nel determinare il suo grado n e i valori dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
Radice di $p(x)$ è un numero b tale che $p(b) = 0$. Se b è radice di $p(x)$ allora $p(x)$ è divisibile per $(x-b)$, cioè si può scomporre in fattori

$$p(x) \ = \ (x-b) \cdot q(x)$$

con $q(x)$ polinomio di grado $n-1$.
È chiaro che questa proprietà vale anche inversamente; se si può scrivere $p(x) = (x-b) \cdot q(x)$, allora $p(b) = 0$.
Questo permette di scrivere molto facilmente un polinomio avente come radici uno o più numeri assegnati $b_1, b_2, \ldots, b_n$: il più semplice polinomio con questa proprietà è il polinomio di grado n

$$p(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

Siamo ormai prossimi all'oggetto del quesito. Scrivere un polinomio che assume il valore 2 in n punti assegnati non è in sostanza diverso da scriverne uno che in n punti assegnati valga zero: se $p(x)$ ha come radici $b_1, b_2, \ldots, b_n$, allora il polinomio $p(x) + 2$ assume nei medesimi punti il valore 2. Questa osservazione costituisce la chiave per risolvere il nostro attuale quesito.

Un polinomio che si annulla, ad esempio, per $x = 0, 1, 2, 3$ (e in

nessun altro punto) è

$$p(x) \;=\; x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Il polinomio

$$p(x)+2 \;=\; x(x-1)(x-2)(x-3)+2 \;=\; x^4-6x^3+11x^2-6x+2$$

assume il valore 2 per $x=0,1,2,3$ (e in nessun altro punto); quindi soddisfa le richieste del testo.

Aggiungiamo una riflessione più ampia.
Il problema qui proposto è il caso particolare di un problema più vasto, che ha pure un notevole interesse applicativo:

determinare un polinomio che assuma valori assegnati in una lista di punti assegnati.

Desideriamo cioè che risulti

$$p(x_1)=y_1\,,\quad p(x_2)=y_2\,,\;\ldots\,,\quad p(x_m)=y_m$$

essendo $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e $y_1, y_2, \ldots, y_m$ valori assegnati, con $x_1, x_2, \ldots, x_m$ <u>tutti diversi fra loro</u>.
Il polinomio $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ soddisfa questi requisiti se

$$\begin{cases} a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \;=\; y_1 \\ a_n x_2^n + a_{n-1}x_2^{n-1} + \ldots + a_1 x_2 + a_0 \;=\; y_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n x_m^n + a_{n-1}x_m^{n-1} + \ldots + a_1 x_m + a_0 \;=\; y_m \end{cases}$$

Questo è un sistema di m equazioni nelle $n+1$ incognite $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

Se $m>n+1$, in generale il sistema è impossibile; se $m=n+1$ ha una sola soluzione (un esempio familiare agli studenti è il caso di $m=3$, $n=2$: si tratta di trovare la parabola passante per tre punti assegnati). Se $m<n+1$ ci sono infinite soluzioni, cioè ci sono infiniti polinomi soddisfacenti ai requisiti.

Nel caso del presente quesito, la richiesta è trovare un polinomio che vale 2 in quattro punti diversi, per esempio in 0, 1, 2, 3.
Rispetto a quanto detto sopra è $m=4$, quindi, per avere $m=n+1$ basterebbe cercare un polinomio di grado *apparente* $n=3$ (apparente, perché potrebbe essere minore, se il coefficiente di x^3 fosse nullo). Ma questo non funziona: se poniamo

$$p(x)=a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

e impostiamo il sistema corrispondente a

$$p(0) = 2\,, \qquad p(1) = 2\,, \qquad p(2) = 2\,, \qquad p(3) = 2$$

troveremo $a_3 = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 2$; ne risulta il polinomio costante 2, che non è ciò che stiamo cercando.
Occorre, come si è visto nella risoluzione più semplice, un polinomio di grado 4,

$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Il sistema corrispondente alle quattro condizioni dette sopra è

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 \\ 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2 \\ 81a_4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 2 \end{cases}$$

Risolvendolo si trovano i polinomi di grado 4 che valgono 2 nei punti 0, 1, 2, 3; si tratta dei polinomi

$$p(x) = 2 + K\,x(x-1)(x-2)(x-3)$$

con K costante arbitraria.

Abbiamo ritenuto utile esporre questa tecnica per completezza; è chiaro tuttavia che nel caso attuale questo tipo di approccio al problema non è consigliabile, per la mole di calcoli assai maggiore, rispetto all'altro metodo proposto.

Quesito 5

Il quesito consiste in un facile esercizio di applicazione del Teorema di Rolle; il solo requisito per poterlo risolvere correttamente è ricordare l'enunciato di detto Teorema.

Ricordiamo l'enunciato del Teorema di Rolle:

Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è una funzione continua in* $[a, b]$, *derivabile in* $]a, b[$, *ed è* $f(a) = f(b)$, *allora esiste almeno un* $c \in]a, b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Ora, si nota senza difficoltà che il primo membro della seconda equazione data nel testo del problema è la derivata del primo membro della prima equazione.

Ebbene, è facile dimostrare il seguente corollario del Teorema di Rolle:

Se f *è una funzione derivabile in un intervallo* I, *allora tra due punti* $a, b \in I$ *in cui f vale zero c'è almeno un punto c in cui si annulla* f'.

Infatti si ha che

- f è derivabile nell'intervallo $[a, b]$ (per ipotesi)
- f è continua in $[a, b]$, in quanto che è derivabile
- $f(a) = f(b)$, poiché per ipotesi entrambi sono uguali a zero;

perciò per il Teorema di Rolle risulta $f'(c) = 0$ in almeno un punto $c \in]a, b[$.

Il Corollario provato qui sopra si applica in particolare alla funzione

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0$$

ottenendo ciò che si doveva dimostrare.

Quesito 6

Si deve, in sostanza, discutere il numero di soluzioni di un'equazione in funzione del valore di un parametro. La tecnica più conveniente consiste nell'isolare il parametro.

L'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ non ha tra le sue radici 0, per alcun valore di b; quindi tale equazione è equivalente a quella che si ottiene dividendo per x entrambi i membri, cioè

$$x^2 + b - \frac{7}{x} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad -x^2 + \frac{7}{x} = b.$$

Le soluzioni dell'equazione possono dunque essere interpretate come le ascisse dei punti di intersezione della curva $y = \frac{7}{x} - x^2$ con la retta di equazione $y = b$, parallela all'asse x.

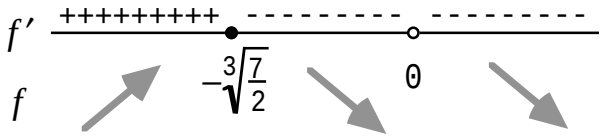
Studiamo dunque la funzione $f(x) = \frac{7}{x} - x^2$, limitatamente a quanto occorre ai fini del presente esercizio, cioè ai fini di stabilire, in funzione del valore di b, quante volte il grafico di f interseca la retta $y = b$.

$f(x)$ esiste per ogni $x \neq 0$; si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,;$$

$$f'(x) = \frac{-7}{x^2} - 2x = \frac{-7 - 2x^3}{x^2}.$$

Il segno di $f'(x)$ varia come indicato nel seguente schema, il quale mostra anche in quali intervalli f è crescente e in quali è decrescente.



f ha un massimo relativo per $x = -\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$; il valore di *f* in tale punto è

$$f\left(-\sqrt[3]{\frac{7}{2}}\right) = -7\left(\frac{7}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{7}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(-7 - \frac{7}{2}\right) = -\frac{21}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Il grafico di f consiste dunque di due rami: quello relativo a $x < 0$ ha quota massima $-3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, mentre le due "code" tendono a $-\infty$; il ramo relativo a $x > 0$ è decrescente, da $+\infty$ a $-\infty$ (figura 10).

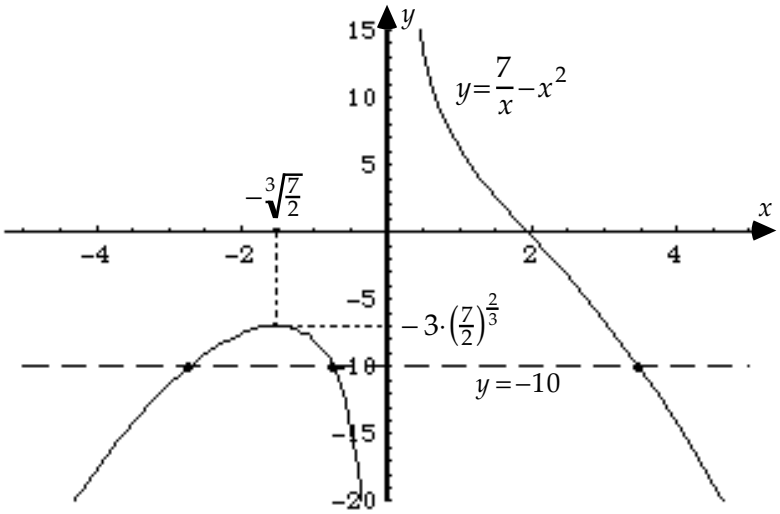


figura 10

Così, ogni retta parallela all'asse *x*, di equazione $y = b$, interseca una ed una sola volta il grafico di f in un punto di ascissa positiva; inoltre, se $b < -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, la retta interseca in due punti il ramo di grafico relativo a $x < 0$; questo ramo non viene intersecato, invece, se $b > -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. Se $b = -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ la retta $y = b$ è tangente al grafico di *f* nel massimo.

Nella figura 10 abbiamo tracciato la retta $y = -10$; poiché $-10 < -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, tale retta interseca il grafico di *f* in tre punti.

Ricapitolando: <u>l'equazione</u> $x^3 + bx - 7 = 0$ <u>ha tre radici reali distinte se e solo se</u> $b < -3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\left(\cong -6,9156544\ldots\right)$.

Quesito 7

È richiesto il calcolo di un integrale (la soluzione è immediata); successivamente si

utilizza il risultato per calcolare un'approssimazione di π mediante il calcolo approssimato dell'integrale.

Si ha

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \;=\; 4\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 \;=\; 4\operatorname{arctg}1 \;=\; \pi$$

come affermato dal testo.

Per calcolare un'approssimazione di $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ si possono applicare diversi metodi; i più semplici sono quello *dei rettangoli* e quello *dei trapezi*. Il metodo dei rettangoli è meno preciso, a parità del numero di suddivisioni dell'intervallo; tuttavia, poiché $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ è decrescente in $[0,1]$ si ha il vantaggio di riconoscere immediatamente che la stima dell'integrale è <u>per eccesso</u> se si prendono come altezze dei rettangoli i valori di *f* nel <u>primo</u> estremo di ciascun intervallino, la stima è <u>per difetto</u> se si prendono invece i valori nei secondi estremi (figure 11 e 12, in cui $[0,1]$ è stato suddiviso in 5 parti).

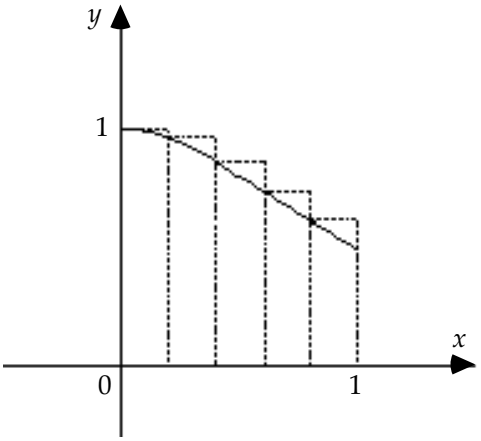


figura 11

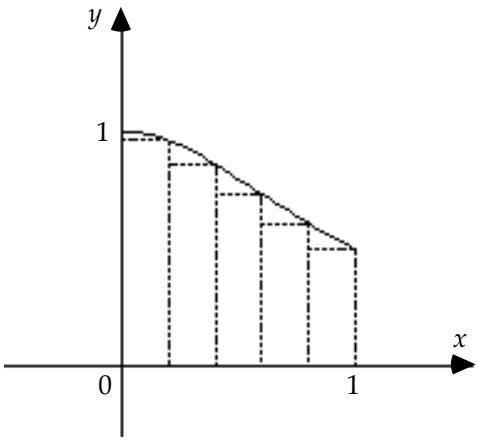


figura 12

Avendo a disposizione un'approssimazione per difetto ed una per eccesso si ha un intervallo entro il quale si trova la misura che si desidera stimare (π, nel caso attuale). Per migliorare la precisione, senza cambiare metodo di approssimazione, occorre aumentare il numero di suddivisioni dell'intervallo di integrazione.

Osserviamo peraltro che il testo del quesito non richiede una stima esplicita della bontà dell'approssimazione; quindi quanto detto, e che ci apprestiamo a realizzare, va oltre le richieste espressamente contenute nel testo.

Dividendo l'intervallo in 5 parti, come nelle figure, otteniamo le seguenti approssimazioni, nelle quali abbiamo introdotto anche il fattore 4, per avere un confronto con π:

Approssimazione per eccesso col metodo dei rettangoli:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \;\approx\; 4\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \;=\; 3,33493\ldots$$

Approssimazione per difetto col metodo dei rettangoli:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \;\approx\; 4\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \;=\; 2,93493\ldots$$

La precisione raggiunta è assai modesta: abbiamo stabilito che

$$2,93493 < \pi < 3,33493\,.$$

Una migliore precisione, ovvero stime più ravvicinate, si può ottenere aumentando il numero di intervalli. Per esempio, eseguendo con un calcolatore lo stesso calcolo con la suddivisione di $[0,1]$ in 100 parti otteniamo

$$3,13158 < \pi < 3.15158\,.$$

L'approssimazione dell'integrale col metodo dei trapezi, relativa alla suddivisione di $[0,1]$ in 5 parti (figura 13) fornisce invece il seguente risultato:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \;\approx\; 4\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{5}\right)+f\left(\frac{k+1}{5}\right)\right) \;=\; 3,13493\ldots$$

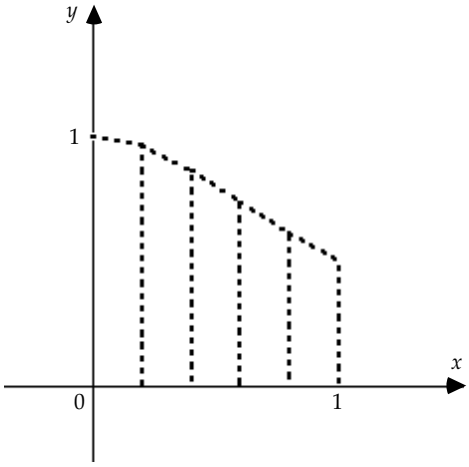


figura 13

Poiché la funzione integranda non è sempre concava o sempre convessa nell'intervallo $[0,1]$, non sappiamo se la stima è per difetto o per eccesso (se la funzione fosse concava, la stima sarebbe per difetto; se fosse convessa, per eccesso).
Naturalmente, nel caso specifico vediamo che il risultato approssima π per difetto, ma questo non ha a che vedere con alcun risultato generale.
La regola dei trapezi, a parità del numero di suddivisioni, è più precisa di quella dei rettangoli. Dividendo $[0,1]$ in 100 parti si ottiene il seguente risultato, già piuttosto buono:

$$4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx 4\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{5}\right)+f\left(\frac{k+1}{5}\right)\right) = 3,14158\ldots$$

(ricordiamo che il valore esatto di π, fino alla decima cifra decimale, è $\pi = 3,1415926535$).

Quesito 8

La domanda è formulata in maniera assai curiosa: dare un esempio di un solido il cui volume abbia valore assegnato. Ci sono, ovviamente, infinite risposte possibili, a meno che non si richieda al candidato di indovinare che cosa avesse in mente l'autore del quesito.

Se interpretiamo alla lettera il testo (e così dovrebbe essere, quando si risolve un problema di matematica!), calcoliamo

$$\int_0^1 \pi x^3\ dx = \pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

e cerchiamo un solido avente volume $\frac{\pi}{4}$. Non c'è che l'imbarazzo della scelta:

- un cubo di lato $\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$
- un prisma retto con base quadrata di lato 1 e altezza $\frac{\pi}{4}$;
- un cilindro circolare retto con raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza 1;
- una sfera di raggio $\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$
- …

Se invece proviamo ad immaginare l'intenzione dell'autore del quesito, forse egli si è ispirato alla formula che fornisce il volume del solido di rotazione attorno all'asse x del grafico di una funzione f, in un intervallo $[a, b]$ (cfr.5.31):

$$Volume = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2\ dx$$

L'espressione $\int_0^1 \pi x^3 dx$ fornisce dunque *anche* il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x la curva di equazione $y = x^{\frac{3}{2}}$, con $x \in [0,1]$. Tuttavia questa risposta non si deve in alcun modo considerare "più corretta" o "più pertinente" delle precedenti.

Quesito 9

Si deve calcolare il valore di un'espressione, disponendo di alcune informazioni su una

funzione e le sue derivate prima e seconda. Vanno applicate le tecniche relative all'integrazione indefinita.

La più naturale strategia risolutiva consiste in due successive integrazioni:

$$f''(x) = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; f'(x) = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

con C costante arbitraria; ma essendo assegnato il valore $f'(0) = 1$ otteniamo

$-\cos 0 + C = 1$; $-1 + C = 1$; $C = 2$ e quindi $f'(x) = 2 - \cos x$.

Una nuova integrazione fornisce

$$f(x) = \int (2 - \cos x)\, dx = 2x - \operatorname{sen} x + K$$

con K nuova costante.

Non ci sono dati per calcolare il valore di K, il quale peraltro non influisce sul risultato dell'espressione richiesta:

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0) = \left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + K\right) - \left(2 \cdot 0 - \operatorname{sen}(0) + K\right) = \pi - 1.$$

L'eventuale omissione della costante K non avrebbe in questo caso compromesso il risultato; sarebbe stato comunque un errore, al pari dell'eventuale omissione della costante C nella prima integrazione; omissione, quest'ultima, che avrebbe anche impedito di ricavare il risultato esatto.

Quesito 10

È un problema standard sull'esistenza e l'approssimazione di radici di un'equazione. Sarebbe forse stato opportuno che il testo avesse indicato la precisione richiesta per l'approssimazione.

Come abbiamo già osservato in circostanze analoghe, una richiesta del tipo "verificare che l'equazione ... ammette radici" non va in nessun caso affrontata tentando di *calcolare* le radici: ciò risulta in generale impossibile.

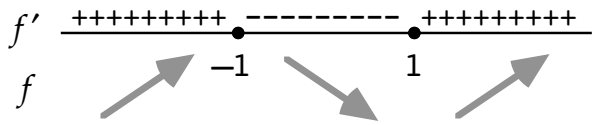
Per verificare l'esistenza delle radici, studiamo, limitandoci al necessario, la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Il segno di $f'(x)$ e le conseguenze sull'andamento di f sono schematizzati qui sotto:



–1 e 1 sono rispettivamente un punto di massimo e un punto di minimo relativo; i corrispondenti valori di *f* sono

$$f(-1)=3 \quad \text{e} \quad f(1)=-1$$

Nell'intervallo $]-\infty,-1]$ f è continua e crescente, e passa da valori negativi a valori positivi; per il Teorema degli zeri c'è una radice di f in $]-\infty,-1]$; questa è unica in tale intervallo, a causa della crescenza di *f*.

Un ragionamento analogo prova che c'è un'altra radice (e una sola) in $[-1,1]$, e un'altra ancora, a sua volta unica, in $[1,+\infty[$. Resta così provato che l'equazione considerata ha tre radici reali.

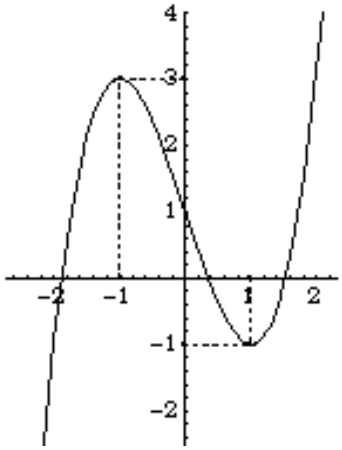


figura 14

Di esse, quella compresa fra –1 e 1, che d'ora in poi indicheremo con x^*, si trova, più precisamente fra 0 e 1, essendo $f(0)=1>0$ e $f(1)=-1<0$.

Per calcolare un valore approssimato di x^* si possono applicare diversi metodi; il più semplice, ma non molto rapido, è il metodo di bisezione; qui applichiamo il più potente *metodo di Newton delle tangenti*, la cui convergenza è assai più rapida. Per i dettagli su questo metodo, si veda lo svolgimento del Quesito 2 della Sessione Suppletiva P.N.I., anno scolastico 1999/2000.

Nell'intervallo $[0,1]$ f è decrescente e <u>convessa</u>: infatti $f''(x)=6x$ è ≥ 0 in tale intervallo. Il metodo impone allora di chiamare:

$$x_0=0 \ \left(\text{primo estremo dell'intervallo}\right)$$

e successivamente

$$x_{n+1} \ = \ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ossia, con i dati attuali,

$$x_{n+1} \ = \ x_n - \frac{x_n^3-3x_n+1}{3x_n^2-3} \ \equiv \ R(x_n).$$

In questo modo si ottiene una successione *crescente* che ha come limite x^*; poiché la successione è crescente, i suoi valori sono approssimazioni *per difetto* di x^*. In ciascuno dei punti x_n il valore di *f* è *positivo*, perché

$$\left.\begin{array}{r} x_n < x^* \\ f \ \ decrescente \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(x_n) > f(x^*) = 0$$

Calcoliamo i primi valori della successione.

$$x_1 = R(x_0) = R(0) = \frac{1}{3};$$

poi, con l'aiuto di una calcolatrice,

$$x_2 = R(x_1) = R\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0,347222$$

$$x_3 = R(x_2) = 0,347296$$

La precisione raggiunta è già ottima. Possiamo accertare la precisione della stima in modo semplice. Scegliamo a piacere un valore x' leggermente superiore a x_3, e calcoliamo $f(x')$. Se risulterà $f(x') < 0$ sapremo che $x' > x^*$, perché f è decrescente e $f(x^*) = 0$; avremo così una stima per eccesso di x^*, accanto a quella per difetto data da x_3.

Se al primo tentativo trovassimo $f(x') > 0$, dovremmo cambiare la scelta di x', aumentandone il valore, fino a trovare un x' in cui $f(x') < 0$

Aumentiamo di una unità l'ultima cifra decimale considerata per x_3, cioè scegliamo $x' = 0,347297$; il corrispondente valore di f è

$$f(0,347297) = -1,70073 \cdot 10^{-6} < 0.$$

Come detto, ciò significa che $0,347297 > x^*$, perché f è decrescente in $[0,1]$ e $f(x^*) = 0$. Dunque

$$0,347296 \ < \ x^* \ < \ 0,347297$$

Con sole tre iterazioni abbiamo ottenuto un'approssimazione di x^* con un errore inferiore a 10^{-6}. Per arrivare a una simile precisione con il metodo di bisezione avremmo dovuto bisecare l'intervallo $[0,1]$ fino ad ottenere un sottointervallo contenente x^*, di lunghezza inferiore a 10^{-6}. Il numero di iterazioni necessarie è il minimo intero n tale che

$$2^{-n} < 10^{-6} \ \text{ cioè } \ 2^n > 10^6 \ \text{ cioè } \ n \ln 2 > 6 \ln 10, \ \ n > \frac{6 \ln 10}{\ln 2} = 19,93\ldots$$

Sarebbero quindi necessarie 20 iterazioni.