Esame di Stato di Liceo Scientifico

a.s. 2002-2003

P.N.I.

Sessione suppletiva

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.

Problema 1.

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, sono assegnate le parabole di equazione

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

Problema 2.

In un trapezio rettangolo *ABCD*, circoscritto ad un cerchio, *AB* è la base maggiore, *CD* la minore e *BC* il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del

cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani *Oxy*, scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

c) Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice *B* del trapezio nel vertice *C* e il vertice *C* nel vertice *D*.

d) Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

Questionario.

1. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.
(Nota - La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II secolo d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno).

2. Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta *r*.
Si sa che *r* è parallela ad α e perpendicolare a β.
Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli *x* reali tali che:

A) $x \le 0 \;\; e/o \;\; x > 2$ *B*) $x \le 0 \;\; e/o \;\; x \ge 2$
C) $x = 0 \;\; e/o \;\; x > 2$ *D*) $x = 0 \;\; e/o \;\; x \ge 2$

4. Si consideri un polinomio di grado $n \ge 2$ nella variabile reale *x* con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5. Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per
a) $x \to +\infty$; *b*) $x \to -\infty$; *c*) $x \to 0$.

6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite *x*, *y*, *z*:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.
Dire se l'affermazione "il sistema ammette la sola soluzione $x=0$, $y=0$, $z=0$ per ogni valore di k diverso da 1" è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7. Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

8. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta, e di questa trovare il punto unito.

9. Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere.
Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca sapendo che la prima:
a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
c) è messa da parte senza guardarne il colore?

10. Considerata l'equazione in x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

Leggiamolo insieme

Problema 1

Oggetto principale del problema è una famiglia di parabole la cui equazione dipende da un parametro a. Le domande poste non contengono particolari difficoltà. L'ultima domanda (***e***) richiede il calcolo dell'area di una parte di piano delimitata dal luogo dei vertici delle parabole, determinato al punto precedente. È

necessario prestare estrema attenzione ai calcoli nella determinazione di detto luogo, perché in caso di errore, un'equazione di terzo grado che interviene nei calcoli relativi a (***e***) con ogni probabilità risulterebbe non risolubile elementarmente, impedendo la prosecuzione dell'esercizio.

Che cosa ripassare?

Le formule di geometria analitica relative alla parabola; le proprietà delle congruenze; il passaggio dalle equazioni parametriche di un luogo geometrico all'equazione cartesiana; l'applicazione del calcolo integrale alle aree di figura piane; l'integrazione delle funzioni razionali.

Problema 2

Il problema inizia con una questione di geometria, per la quale sono essenziali le proprietà delle tangenti a un cerchio condotte da un punto esterno. La seconda parte del problema richiede la determinazione e lo studio di una affinità avente proprietà assegnate. A questo proposito, occorre prestare attenzione alla scelta del sistema di riferimento (domanda ***b)***), affidata al candidato: osservando le richieste della domanda ***c)*** appare chiaro che l'origine del sistema non può essere posta in alcuno dei punti *B*, *C*, *D*.

Che cosa ripassare?

Le proprietà delle tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno; i Teoremi di Euclide. Affinità nel piano e loro proprietà, con particolare riguardo agli elementi uniti (punti e rette) e al rapporto fra aree di figure corrispondenti.

Soluzione del problema 1

Domanda *a*): discussione dell'intersezione con l'asse *x*.

Eventuali punti di intersezione tra la parabola di equazione

(1) $$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2$$

e l'asse *x* si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

del quale l'equazione risolvente è

(2) $$(a-1)x^2 - 2ax + a^2 = 0.$$

Il discriminante (ridotto) della (1) è

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (a-1)a^2 = a^2(2-a).$$

La (2) ha soluzioni reali se e solo se è $\Delta \geq 0$. Poiché il fattore a^2 non può essere negativo, risulta

$$\Delta \geq 0 \iff a \leq 2 \text{ oppure } a = 0.$$

Poiché il caso $a = 0$ è compreso nella condizione $a \leq 2$ possiamo più semplicemente dire che

Le parabole (1) *hanno punti in comune con l' asse* x *se e solo se* $a \leq 2$

Domanda *b*): parabole con vertice di ascissa *a*.

L'ascissa del vertice della parabola di equazione (1) è (cfr.3.35)

$$x_V = \frac{a}{a-1}.$$

Imponendo $x_V = a$ abbiamo pertanto

$$\frac{a}{a-1} = a; \quad a = a(a-1); \quad a(a-2) = 0; \quad a = 0 \text{ oppure } a = 2.$$

L' ascissa del vertice della parabola (1) *è* a *se e solo se* $a = 0$ *oppure* $a = 2$
Le corrispondenti parabole sono
$(a = 0) \qquad y = -x^2$
$(a = 2) \qquad y = x^2 - 4x + 4$

Domanda *c*): sulla congruenza delle parabole di *b*).

Due parabole con asse parallelo all'asse *y*, di equazioni

$$y = a_1 x^2 + b_1 x + c_1; \qquad y = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

sono congruenti se e solo se $|a_1| = |a_2|$. Infatti, se questa condizione non è soddisfatta, le due parabole hanno "apertura" diversa: cioè spostandosi, ad esempio, di 1 dall'ascissa del vertice, la variazione dell'ordinata è diversa sulle due parabole.

Se è $a_1 = a_2$, la più semplice isometria che muta la prima parabola nell'altra è la traslazione che porta il vertice della prima sul vertice della seconda.

Se è $a_1 = -a_2$, la più semplice isometria che muta la prima parabola nell'altra è la simmetria centrale rispetto al punto medio fra i due vertici.

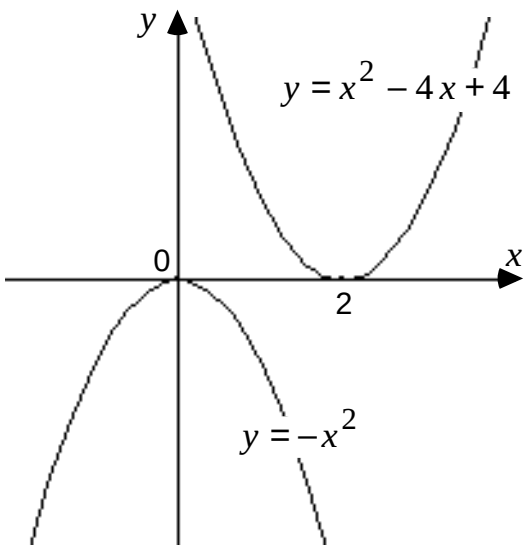


figura 1

Questo è il caso che si presenta attualmente, essendo $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. I vertici delle due parabole trovate in ***b)*** sono

$$V_0\ (0,0); \qquad V_2\ (2,0)$$

Il punto medio fra i due vertici è $C\ (1,0)$ (cfr.3.4).

La simmetria centrale con centro C ha equazioni (cfr.3.75)

$$\begin{cases} X = 2 - x \\ Y = -y \end{cases}$$

È facile verificare direttamente che questa trasformazione muta ciascuna delle due parabole determinate in ***b)*** nell'altra.

Domanda *d*): luogo dei vertici delle parabole di equazione (1)**.**

Abbiamo già determinato in ***b)*** l'ascissa del vertice di una generica parabola di equazione (1):

$$x_V = \frac{a}{a-1}$$

Sostituendo questa espressione alla x in (1), oppure utilizzando la formula apposita (cfr.3.35) troviamo

$$y_V = a^2 \frac{a-2}{a-1}$$

Abbiamo così le *equazioni parametriche* del luogo L dei vertici:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{a-1} \\ y = a^2 \dfrac{a-2}{a-1} \end{cases}$$

Per eliminare il parametro e determinare l'equazione cartesiana di L ricaviamo l'espressione di a in funzione di x dalla prima di (3), e sostituiamo nella seconda equazione l'espressione ottenuta:

$$ax - x = a\ ; \quad a(x-1) = x\ ; \quad a = \frac{x}{x-1}\ (x \neq 1);$$

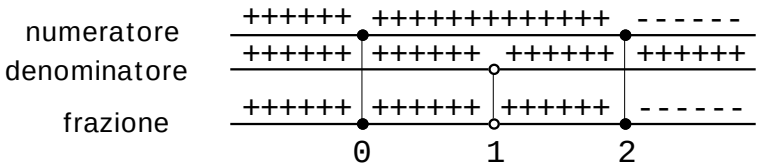
$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}\,\frac{\frac{x}{x-1}-2}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x^2}{(x-1)^2}\,\frac{\frac{2-x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{\textit{Equazione del luogo } L \textit{ dei vertici}: \quad y = \frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}\ (x \neq 1)}$$

Studio della funzione $f(x) = \frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}$.

Dominio: $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Segno: Potendosi scrivere $f(x) = \frac{x^2(2-x)}{(x-1)^2}$ si ha quanto segue:



Il grafico taglia l'asse delle ascisse nel punto $(2,0)$ e lo tocca nell'origine, mantenendosene al di sopra.

Limiti. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

e analogamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Poi, tenendo presente il segno della funzione, si ha

$$\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$$

La retta $x = 1$ è pertanto asintoto verticale per il grafico di *f*; c'è anche un asintoto obliquo, perché *f* è una funzione razionale in cui grado del numeratore supera di una unità il grado del denominatore.

Per trovare l'equazione $y = mx + q$ dell'asintoto obliquo si può usare la formula generale (cfr.5.10)

$$m = \lim_{x\to(\pm)\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad q = \lim_{x\to(\pm)\infty} \left(f(x) - mx\right)$$

oppure più semplicemente, nel caso di una funzione razionale, come quella attualmente in esame, si può calcolare il *quoziente* $Q(x)$ della divisione fra numeratore e denominatore; $y = Q(x)$ è l'equazione dell'asintoto. Seguiamo questa seconda alternativa.

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^3 - 2x^2 + x & -x \\ \hline \underline{\underline{x}} & \end{array}$$

$Q(x) = -x$, $R(x) = x$ sono rispettivamente il <u>quoziente</u> e il <u>resto</u> della divisione di $\left(-x^3 + 2x^2\right)$ per $(x-1)^2$; vale a dire che

(4) $$f(x) = -x + \frac{x}{(x-1)^2}$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = -x$.
I calcoli qui svolti per trovare l'asintoto obliquo sono necessari anche per il calcolo dell'integrale che si dovrà calcolare al punto ***e)***; servirà a quel punto anche scomporre la frazione $\frac{x}{(x+1)^2}$ in somma di «fratti semplici», cioè porre

(5) $$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

e calcolare i valori i A e B per i quali la (5) è soddisfatta per ogni x.
Svolgiamo subito questo calcolo, dopo il quale, come vedremo, saremo facilitati anche nel calcolo delle derivate di f.
Eseguiamo l'addizione al secondo membro di (5):

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax + (-A+B)}{(x-1)^2}$$

Quest'ultima espressione coincide con $\frac{x}{(x-1)^2}$ se è:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

cosicché da (5) abbiamo

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

e ora da (4) otteniamo

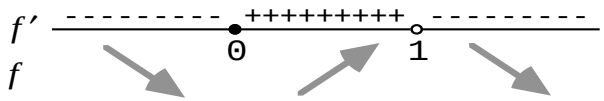
(6) $$f(x) = -x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Derivata. Per calcolare $f'(x)$ ci serviamo dell'espressione (6), perché in questo modo il calcolo risulta abbreviato. Naturalmente il risultato sarebbe lo stesso anche procedendo diversamente.

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - x + 1 - 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{-x^3+3x^2-4x}{(x-1)^3} = \frac{-x\left(x^2-3x+4\right)}{(x-1)^3}$$

Osservando che il trinomio x^2-3x+4 ha il discriminante negativo, e quindi è sempre positivo, si studia facilmente il segno di $f'(x)$, ottenendo i seguenti risultati, con le conseguenze indicate sulla crescenza e decrescenza della funzione:

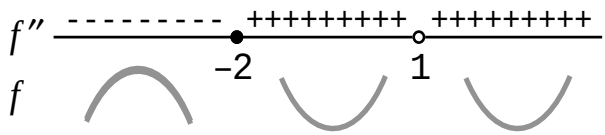


$x=0$ è punto di minimo relativo per *f*; questo fatto si poteva prevedere già dallo studio del segno della funzione.
Risulta $f(0)=0$.
$x=1$ non è estremante per *f* perché non appartiene al dominio.

Derivata seconda. Calcoliamo la derivata di $f'(x)$, scritta quest'ultima come nel primo passaggio del suo calcolo. Otteniamo

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}+\frac{6}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1+3)}{(x-1)^4} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}$$

il cui segno varia come indica il seguente schema, con le conseguenze riportate per la convessità e concavità di *f*.



$x=-2$ è punto di flesso per *f*; risulta $f(-2)=\frac{16}{9}$.
La figura 2 mostra il grafico di *f* ed i suoi asintoti.

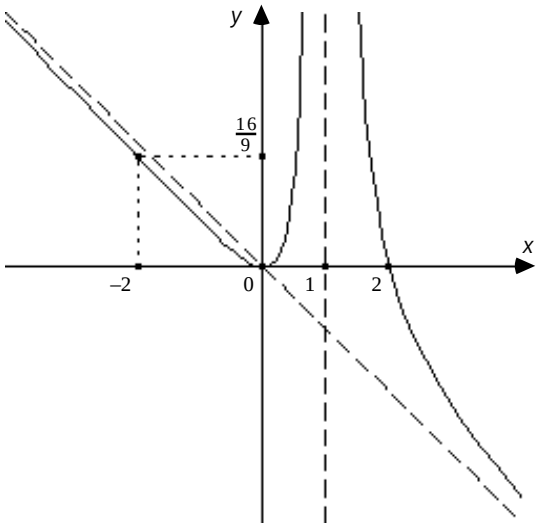


figura 2

Domanda *e*):
calcolo dell'area.

Occorre per prima cosa calcolare le ascisse dei punti d'intersezione della curva *L* con la retta $y=\frac{3}{2}$; si tratta di risolvere l'equazione

$$\frac{-x^3+2x^2}{(x-1)^2}=\frac{3}{2}\,;\quad \frac{-2x^3+4x^2}{2(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x+3}{2(x-1)^2}\,;\quad 2x^3-x^2-6x+3=0.$$

Se il polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$ ha radici razionali, queste appartengono all'insieme $\left\{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$. Un calcolo diretto mostra che $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; quindi $p(x)$ è divisibile per $\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Il quoziente si può trovare applicando la regola di Ruffini, come segue

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & -6 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

Così risulta

$$2x^3 - x^2 - 6x + 3 \;=\; \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 6\right) \;=\; 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

Le soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$ sono dunque $x = \frac{1}{2}$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Di queste, le prime due sono le ascisse dei punti estremi della regione piana di cui è richiesta l'area (figura 3); il punto di L di ascissa $\sqrt{3}$ appartiene invece all'altro ramo di L, a destra dell'asintoto verticale.

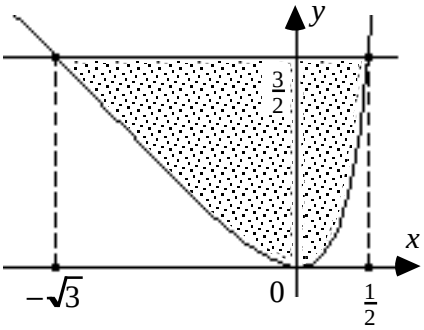


figura 3

L'area richiesta è data dal seguente integrale (cfr.5.30):

$$Area \;=\; \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} - f(x)\right) dx$$

Per il calcolo dell'integrale bisogna effettuare la scomposizione di $f(x)$ in somma di "fratti semplici". Questo calcolo lo abbiamo già fatto; il suo risultato è dato nella (6), che per comodità riportiamo:

(6) $$f(x) \;=\; -x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Perciò

$$Area = \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} + x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 3\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{3}\right) - 2 + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \;=$$

$$= \; 2\sqrt{3} - \frac{25}{8} + \ln\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{L'\,area\ richiesta\ vale\ \ 2\sqrt{3}-\frac{25}{8}+\ln\left(2+2\sqrt{3}\right)}$$

Soluzione del problema 2

Domanda *a*): calcolo delle misure dei lati del trapezio.

Siano *L*, *K*, *M*, *H* i punti di tangenza del cerchio ai lati del trapezio, *V* il centro del cerchio, come indicato nella figura 4.

Per una nota proprietà delle tangenti a un cerchio, i raggi condotti dai punti di tangenza sono perpendicolari alle rispettive tangenti. Allora, *AHVL* e *LVKD* sono due quadrati, il cui lato misura 2; quindi $\overline{AD}=4$, $\overline{AH}=\overline{DK}=2$.

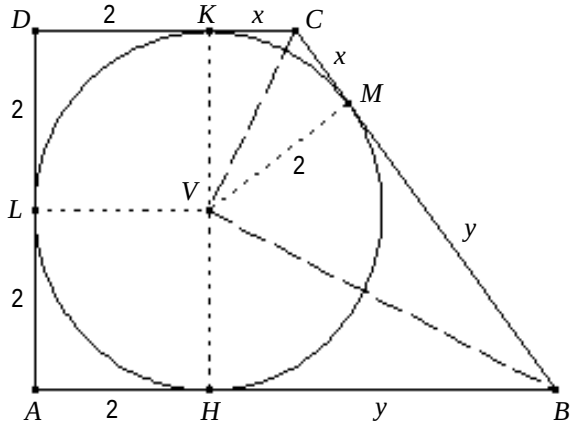


figura 4

CK e *CM* sono i segmenti di tangente condotti a una circonferenza da un punto esterno; allora $\overline{CK}=\overline{CM}$ (cfr.2.17); indichiamo provvisoriamente con *x* la lunghezza di tali segmenti. Con analogo ragionamento si ha $\overline{BH}=\overline{BM}$; indichiamo con *y* tale misura.

Per un'altra proprietà delle tangenti da un punto esterno abbiamo che *CV* è bisettrice di $K\hat{V}M$ e *BV* è bisettrice di $H\hat{V}M$.

Poiché $K\hat{V}H$ è un angolo piatto, $B\hat{V}C$ è retto.

Questi fatti permettono di scrivere due equazioni dalle quali ricaveremo il valore di *x* e *y*.

Innanzitutto, il perimetro del trapezio è dato da $2x+2y+8$; questo è uguale a 18, per ipotesi; dunque

$$2x+2y+8=18 \qquad \text{ossia} \qquad x+y=5$$

L'altra equazione si può ottenere applicando il secondo Teorema di Euclide al triangolo rettangolo *BVC*:

$$\overline{BM}:\overline{VM}=\overline{VM}:\overline{CM} \qquad \text{ossia} \qquad x\cdot y=4$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema simmetrico

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{cases}$$

Tenendo presente anche il fatto che $x<y$, perché *AB* è la base maggiore del trapezio, si ricava subito $x=1$, $y=4$.

Ora conosciamo le misure dei lati del trapezio:

$$\boxed{\overline{AB}=6,\quad \overline{BC}=5,\quad \overline{CD}=3,\quad \overline{AD}=4}$$

Domanda *b*): scelta del sistema di riferimento.

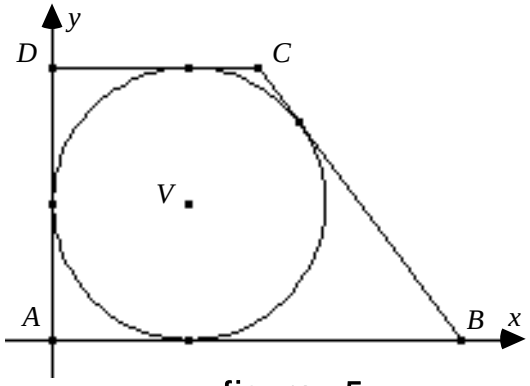


figura 5

La scelta più naturale sembra essere quella che fissa l'origine in A e colloca gli assi lungo i lati AB e AD del trapezio; scegliamo dunque gli assi x e y rispettivamente su AB e AD (figura 5).
Le coordinate dei vertici del trapezio rispetto a questo sistema di riferimento sono in sostanza già note:

$$\boxed{A(0,0);\quad B(6,0);\quad C(3,4);\quad D(0,4)}$$

Domanda *c*): Determinazione della centro-affinità.

"Centro-affinità" è un'affinità che lascia unita l'origine del sistema di riferimento. Osserviamo che la proprietà "essere una centro-affinità" <u>non</u> è un attributo specifico di un'affinità, come lo è, ad esempio "essere una similitudine". Una centro-affinità è tale rispetto a un determinato sistema di riferimento; se si cambia sistema di riferimento, spostando l'origine, quella che era una centro-affinità può darsi che non lo sia più.
A causa di ciò, la risoluzione della presente domanda cambia in modo sostanziale secondo come si è scelto il sistema di riferimento al punto ***b*)**.
Osserviamo innanzitutto che le richieste del testo assicurano che B, C, D <u>non</u> sono punti uniti. Pertanto la eventuale scelta di un sistema di riferimento con l'origine in uno di questi tre punti sarebbe stata da modificare.
Rispetto al sistema di riferimento da noi scelto l'affinità T che cerchiamo deve essere tale che

(1) $$T(6,0)=(3,4)\,;\quad T(3,4)=(0,4)$$

Le equazioni di T sono

(2) $$\begin{cases} x'=a\,x+b\,y \\ y'=c\,x+d\,y \end{cases}$$

Ricaviamo a, b, c, d imponendo le (1):

da $T(6,0)=(3,4)$ si ottiene $\begin{cases} 6a=3 \\ 6c=4 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ c=\frac{2}{3} \end{cases}$

Sostituiamo subito questi valori nella (2); abbiamo dunque

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x+by \\ y'=\frac{2}{3}x+dy \end{cases}$$

Adesso imponiamo la seconda delle (1):

da $T(3,4)=(0,4)$ si ottiene $\begin{cases} \frac{3}{2}+4b=0 \\ 2+4d=4 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} b=-\frac{3}{8} \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$

Perciò:

(3) $\boxed{\textit{Equazioni dell'affinità cercata}: \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x-\frac{3}{8}y \\ y' = \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y \end{cases}}$

Se calcoliamo il trasformato attraverso T del vertice D del trapezio possiamo facilmente disegnare la figura trasformata. Risulta

$$T(0,4)=\left(-\frac{3}{2},2\right).$$

La figura 6 mostra anche l'ellisse in cui viene trasformata la circonferenza inscritta nel trapezio; per disegnarla con precisione può essere utile calcolare le coordinate dei trasformati del centro e dei punti di tangenza (non riportiamo questi calcoli).

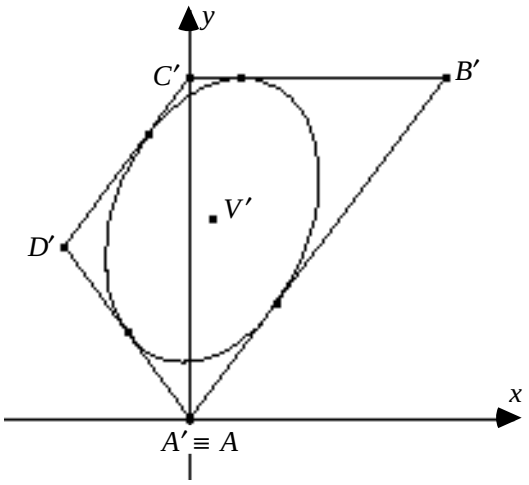


figura 6

Osserviamo che il quadrilatero $A'B'C'D'$ è ancora un trapezio, in quanto $A'B' \,//\, C'D'$: infatti ogni affinità conserva il parallelismo. Invece $A'B'C'D'$ non è più un trapezio *rettangolo*; ciò non deve sorprendere, perché, diversamente dal parallelismo, la perpendicolarità non viene conservata da una generica affinità.

Osserviamo che i calcoli per la determinazione delle equazioni (3) dell'affinità sono stati assai rapidi grazie ai dati particolarmente semplici. In altri casi può risultare utile avvalersi delle tecniche dell'algebra delle matrici, nel modo seguente.

La colonna $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ delle coordinate del trasformato di un punto di coordinate (x, y) è data da

(4) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x + b\,y \\ c\,x + d\,y \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad T(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

I dati (1) si traducono nelle uguaglianze

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e quindi } \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}_{S}.$$

Chiamate M, R, S le matrici sopra specificate, risolviamo l'equazione matriciale $M \cdot R = S$ (M matrice incognita) calcolando

(5) $$M = S \cdot R^{-1}.$$

Ciò è possibile perché R è invertibile, essendo $\det(R) = 24 \neq 0$.
L'inversa di R è

$$R^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi, per la (5), M è data da

$$M = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La centro-affinità (con punto unito A) che soddisfa le (1) è pertanto

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

equivalente alla (3).

Domanda *d*): ricerca di rette unite per la *T*.

Per scrivere l'equazione trasformata di una retta mediante un'affinità T occorrono le equazioni dell'inversa; infatti l'equazione della trasformata di

$$y = m\,x + q$$

si ottengono sostituendo a x, y le rispettive espressioni in funzione di x', y'.
Fortunatamente, per cercare le rette unite per T <u>non occorre</u> determinare l'inversa. Infatti una retta r è unita per T se e solo se è unita per T^{-1}, inversa di T. Cerchiamo dunque le rette unite per T^{-1}, semplificando in questo modo il procedimento.
Una retta r di equazione

(6) $$y' = m x' + q$$

viene trasformata da T^{-1} nella retta la cui equazione si ottiene sostituendo a x' e y' le loro espressioni date dalla (3): cioè

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = m\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y\right) + q\,; \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m\right)y = \left(\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}\right)x + q\,.$$

Se $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m = 0$ allora r non è unita, perché $T^{-1}(r)$ sarebbe parallela all'asse delle ordinate, mentre r non lo è, perché la sua equazione è esplicita.

Se $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m \neq 0$ l'equazione di $T^{-1}(r)$ si può scrivere

(7) $$y = \frac{\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m}x + \frac{q}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m}$$

r è unita se il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine di (7) coincidono con quelli di (6).

Supponiamo per il momento $q \neq 0$; in questo caso le ordinate all'origine coincidono se e solo se

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m = 1\,; \quad \frac{3}{8}m = \frac{1}{2}\,; \quad m = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Con $m = \frac{4}{3}$ il coefficiente angolare di $T^{-1}(r)$ risulta uguale a

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}} = 0$$

diverso da $\frac{4}{3}$. Dunque nessuna retta di equazione $y' = m x' + q$ con $q \neq 0$ è unita.

Se $q = 0$ l'ordinata all'origine di (7) è zero, come quella di (6). Questo è logico, perché l'origine è punto unito per T (e per T^{-1}); quindi ogni retta passante per l'origine viene trasformata in una retta che passa ancora per l'origine.

Uguagliamo dunque i coefficienti angolari di (6) e (7):

$$m = \frac{\frac{1}{2}m - \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}m}\,; \quad \frac{1}{2}m + \frac{3}{8}m^2 = \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}\,; \quad m^2 + \frac{2}{3} = 0\,.$$

L'equazione ottenuta non ha soluzioni. Neppure fra le rette passanti per l'origine ci sono rette unite per T.

Infine, cerchiamo eventuali rette unite per T^{-1} (quindi per T)

parallele all'asse y. La retta di equazione

$$x' = k$$

viene trasformata da T^{-1} nella retta di equazione

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y = k.$$

Questa retta non è in nessun caso parallela all'asse y.
Concludiamo che

$$\boxed{\textit{non ci sono rette unite per } T}.$$

Domanda *e*): area del trasformato del cerchio.

Un'affinità, in generale, non conserva le lunghezze dei segmenti, e neppure le modifica secondo un fattore costante, a meno che non sia una similitudine. Invece le aree di figura corrispondenti mutano secondo un fattore costante, uguale al valore assoluto del determinante della matrice dei coefficienti di x e y nell'equazione di T. Attualmente la matrice dei coefficienti di T è

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{il cui determinante è} \quad \det M = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Perciò l'area della trasformata di una qualunque figura è la metà dell'area della figura originale.
L'area del cerchio inscritto nel trapezio, di raggio 2, è 4π; perciò l'area dell'ellisse nella quale T trasforma il cerchio è 2π.

Questionario

Quesito 1

Si tratta di un problema di geometria piana, risolubile per via geometrica applicando le proprietà delle corde e il Teorema di Pitagora, oppure mediante la trigonometria; in questo caso occorre la formula di bisezione per il seno, come implicitamente suggerisce il testo. Riportiamo entrambe le risoluzioni; in tutti e due i modi, i calcoli sono abbastanza laboriosi. Nello svolgimento viene utilizzata anche la "formula del radicale doppio".

1) Risoluzione "geometrica".

Nel cerchio di centro O e raggio r consideriamo la corda AB di lunghezza ℓ, e la corda AC sottesa dall'angolo al centro $A\hat{O}C = \frac{1}{2}A\hat{O}B$ (figura 7). Per note proprietà di geometria il raggio OC è perpendicolare a AB e interseca AB nel suo punto medio H; questo fatto permette di calcolare la lunghezza di

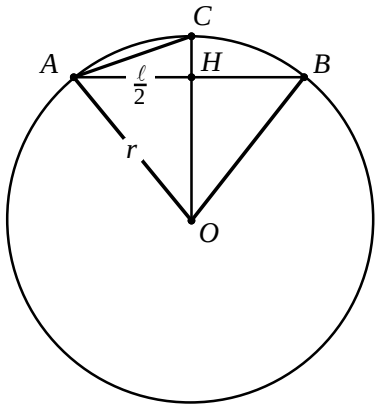


figura 7

AC in funzione di r e ℓ, applicando opportunamente il Teorema di Pitagora. Si ha infatti

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{\ell^2}{4}}\,; \qquad \overline{CH} = \overline{OC} - \overline{OH} = r - \sqrt{r^2 - \frac{\ell^2}{4}}\,;$$

applicando ora il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACH ricaviamo

$$(1)\quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{\frac{\ell^2}{4} + r^2 + r^2 - \frac{\ell^2}{4} - 2r\sqrt{r^2 - \frac{\ell^2}{4}}} =$$

$$= \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - \ell^2}\right)} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{2r - \sqrt{4r^2 - \ell^2}}\,.$$

Il risultato ottenuto in (1) risolve il nostro problema; a tale risultato si può dare tuttavia un'espressione più elegante applicando la *formula del radicale doppio*, che riportiamo per comodità del lettore:

$$(2)\qquad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

La (2) è utile quando l'espressione $\sqrt{a^2 - b}$ è tale da consentire l'eliminazione della radice, cosicché al secondo membro non figurano più radicali doppi.

Abbiamo qui da trattare l'espressione $\sqrt{2r - \sqrt{4r^2 - \ell^2}}$. Con riferimento alla (2) abbiamo qui $a = 2r$, $b = 4r^2 - \ell^2$, quindi

$$\sqrt{a^2 - b} = \sqrt{4r^2 - \left(4r^2 - \ell^2\right)} = \sqrt{\ell^2} = \ell$$

e quindi, applicando (2),

$$\sqrt{2r - \sqrt{4r^2 - \ell^2}} = \sqrt{\frac{2r + \ell}{2}} - \sqrt{\frac{2r - \ell}{2}}\,.$$

Sostituiamo questa espressione in (1) ed otteniamo

$$(3)\qquad \overline{AC} = \sqrt{r} \cdot \left(\sqrt{\frac{2r + \ell}{2}} - \sqrt{\frac{2r - \ell}{2}}\right) = r\left(\sqrt{1 + \frac{\ell}{2r}} - \sqrt{1 - \frac{\ell}{2r}}\right).$$

2) Risoluzione "trigonometrica".

Ancora con riferimento alla figura 7, indichiamo rispettivamente con α e 2α gli angoli $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$. I corrispondenti angoli alla circonferenza che sottendono le corde AC e AB misurano allora $\frac{\alpha}{2}$ e α. Per il Teorema della corda (cfr.4.48) si ha allora

$$(4)\qquad \overline{AB} = 2r \operatorname{sen}\alpha\,; \qquad \overline{AC} = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Per esprimere $\overline{AC}$ in funzione di r e di $\ell = \overline{AB}$ dobbiamo dunque esprimere $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ in funzione di r e di ℓ.
Dalla prima di (4) abbiamo

(5) $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\ell}{2r}.$$

La formula di bisezione per il seno (cfr.4.24) dà

(6) $$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}.$$

Non vi è dubbio in questo caso sul segno (±) da assegnare al secondo membro di (6), perché $A\hat{O}B = 2\alpha \in [0,\pi]$ e quindi $\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, e quindi $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0$.
Da (5) e dalla relazione fondamentale della trigonometria ricaviamo

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{\ell^2}{4r^2}}.$$

Anche questa volta non ci sono dubbi sul segno (±), perché $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi $\cos\alpha \geq 0$.
Sostituendo in (6) questa espressione di $\cos\alpha$ abbiamo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\ell^2}{4r^2}}\right)} = \sqrt{\frac{2r-\sqrt{4r^2-\ell^2}}{4r}}$$

e quindi, per la seconda di (4),

$$\overline{AC} = 2r\sqrt{\frac{2r-\sqrt{4r^2-\ell^2}}{4r}} = \sqrt{r}\sqrt{2r-\sqrt{4r^2-\ell^2}}.$$

Questo è lo stesso risultato ottenuto in (1) col "metodo geometrico'; da qui si procede come prima alla semplificazione dell'espressione mediante la formula del radicale doppio.

Quesito 2

A partire da ipotesi assegnate si deve dimostrare la perpendicolarità di due piani. Questa appare intuitivamente evidente, ma la dimostrazione rigorosa richiede un po' di attenzione; occorre ricordare la definizione di "angolo fra due piani", definito mediante la sezione normale del diedro formato da quei piani, ed il Teorema delle tre perpendicolari.

La figura 8 illustra la situazione descritta nel testo del quesito. Si intuisce che i piani α e β sono perpendicolari; ora lo dimostreremo in modo rigoroso.

L'angolo formato da due piani α e β qualsiasi è l'angolo di una <u>sezione normale</u>, cioè l'angolo formato dalle due rette in cui un terzo piano γ, perpendicolare alla retta $s = \alpha \cap \beta$, interseca α e β.

Mostriamo che, nel nostro caso, il piano γ si può scegliere in modo che contenga la retta r.

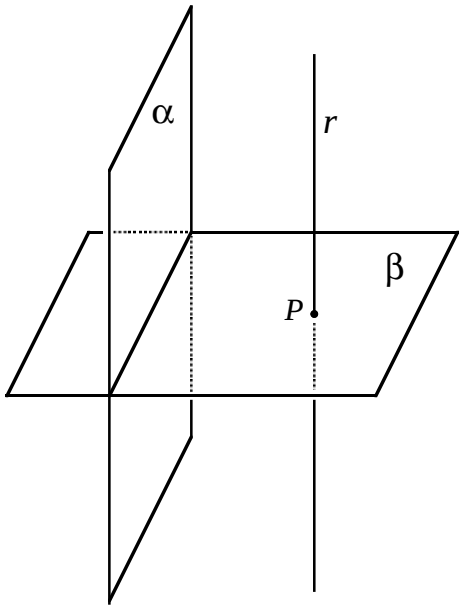


figura 8

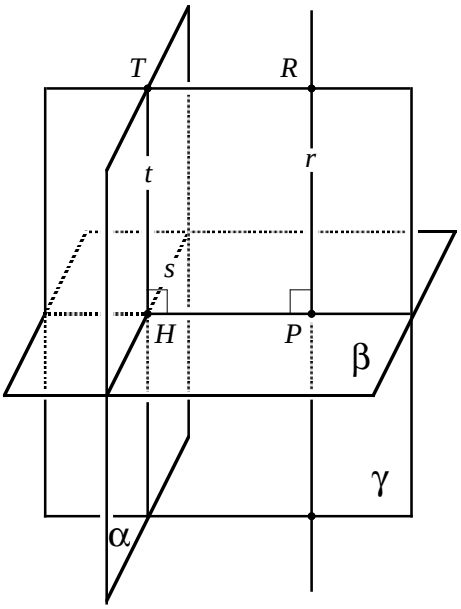


figura 9

Sia P il punto in cui r interseca β. Da P conduciamo sul piano β la perpendicolare a s; sia H il piede di detta perpendicolare (figura 9). Poiché $r \perp \beta$ e, per costruzione, $PH \perp s$, per il Teorema delle tre perpendicolari (cfr.2.31), il piano γ contenente r e H è perpendicolare a s; quindi dà origine ad una sezione normale del diedro formato da α e β.

Sia t la retta $\alpha \cap \gamma$. t è complanare con r (sul piano γ), e giace su α che è parallelo a r; quindi r e t sono parallele.

Siano T, R rispettivamente un punto di t e un punto di r, diversi da P e H, e situati nel medesimo semispazio rispetto a β.

Gli angoli $P\hat{H}T$, $H\hat{P}R$ sono coniugati interni rispetto alla coppia di rette r, t e alla trasversale PH. Poiché $H\hat{P}R$ è retto (in quanto $r \perp \beta$), deve essere retto anche $P\hat{H}T$, supplementare di $H\hat{P}R$. Dunque, una sezione normale del diedro formato da α e β genera un angolo retto, cioè α e β sono perpendicolari, come si voleva dimostrare.

Quesito 3

Si chiede, in sostanza, di risolvere un sistema di disequazioni.

Le condizioni che individuano il dominio della funzione assegnata si ottengono imponendo che il radicando di ciascuna delle due radici quadrate sia ≥ 0; perciò

(1) $$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0 \end{cases}$$

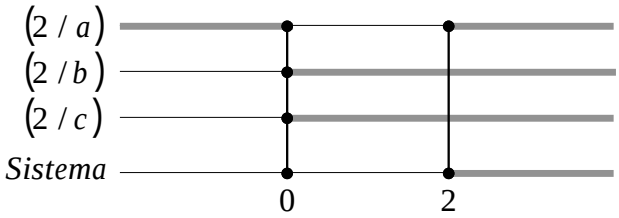
La seconda equazione del sistema si può scrivere

$$\sqrt{x^2 - 2x} \ \leq \ x$$

e quindi (cfr.1.2) equivale al sistema

(2) $$\begin{array}{l} (2/a) \\ (2/b) \\ (2/c) \end{array} \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 - 2x \leq x^2 \end{cases}$$

Osserviamo che (2/*a*) coincide con la prima disequazione del sistema (1); quindi il sistema (2) è sufficiente per caratterizzare il dominio della funzione. Risolviamo il sistema (2). I calcoli per la risoluzione di ciascuna delle tre disequazioni sono semplicissimi, e si svolgono senza difficoltà a mente. Riportiamo lo schema con le soluzioni di ciascuna delle tre disequazioni e la loro intersezione, che dà le soluzioni del sistema:



Il dominio della funzione è $D(f) = \{0\} \cup [2, +\infty[$. Si faccia attenzione a non scordare la "soluzione isolata" $x = 0$.
La riposta esatta è quindi la *D*).

Quesito 4

La questione proposta riguarda le radici multiple di un polinomio; l'argomento è abbastanza vicino a quello del quesito 4, Sessione suppletiva 2002-2003 per i corsi tradizionali. Come in quel caso, occorre una certa abilità per formalizzare opportunamente il problema.

Sia $p(x)$ il polinomio in oggetto. Il numero α è radice di $p(x)$ almeno doppia se e solo se $p(x)$ si può fattorizzare così:

(1) $$p(x) \ = \ (x - \alpha)^2 \cdot q(x)$$

essendo $q(x)$ un altro opportuno polinomio, di grado $n-2$.

Precisamente, α è radice <u>doppia</u> di $p(x)$ se $q(\alpha) \neq 0$; è radice di molteplicità superiore a due, se $q(\alpha) = 0$, perché in tal caso $q(x)$ è a sua volta divisibile per $(x-\alpha)$.
Dimostriamo quanto richiesto. La dimostrazione si svolge in due fasi, dedicate a provare ciascuna delle due implicazioni.

1) Supponiamo α radice almeno doppia di $p(x)$, ossia che valga la (1), e mostriamo che $p'(\alpha) = 0$ (che sia $p(\alpha) = 0$ è ovvio).
Si ha

$$p'(x) \;=\; 2(x-\alpha)\cdot q(x) + (x-\alpha)^2 \cdot q'(x)$$

e quindi $p'(\alpha) = 0$, come si voleva dimostrare.

2) Supponiamo $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$; mostriamo che α è radice almeno doppia per $p(x)$.
Poiché $p(\alpha) = 0$, $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$, cioè si può fattorizzare come segue:

(2) $$p(x) \;=\; (x-\alpha)\cdot r(x)$$

con $r(x)$ opportuno polinomio di grado $n-1$. La derivata di $p(x)$ è:

$$p'(x) \;=\; r(x) + (x-\alpha)\cdot r'(x).$$

Segue che $p'(\alpha) = r(\alpha)$. Per ipotesi $p'(\alpha) = 0$; quindi $r(\alpha) = 0$. Dunque $r(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$, ossia si può scrivere

$$r(x) \;=\; (x-\alpha)\cdot q(x)$$

con $q(x)$ opportuno polinomio, di grado $n-2$.
Sostituendo questa espressione in (2) troviamo

$$p(x) \;=\; (x-\alpha)\cdot r(x) \;=\; (x-\alpha)\cdot(x-\alpha)\cdot q(x) \;=\; (x-\alpha)^2 \cdot q(x)$$

e quindi α è radice almeno doppia di $p(x)$, come si voleva dimostrare.

Quesito 5

Il quesito propone il calcolo di tre limiti; uno di questi non è ammissibile, per ragioni di dominio; uno è riconducibile a un "limite notevole". Può essere utile applicare la regola di de l'Hôpital, dopo una opportuna trasformazione dell'espressione.

Prima di tutto, determiniamo quale è il dominio della funzione

$$h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Bisogna che sia $x \neq 0$ e $1+x > 0$, quindi $x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$.
Non ha quindi senso cercare il $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$. Si possono invece considerare gli altri due limiti indicati, per $x \to 0$ e $x \to +\infty$. Per

calcolarli conviene scrivere (cfr.5.6)

(1) $$h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

e cercare inizialmente i limiti di $\frac{\ln(1+x)}{x}$, esponente di e nella (1).

Quando $x \to 0$ sia il numeratore, sia il denominatore di questa frazione hanno limite zero. Possiamo applicare la regola di de l'Hôpital (cfr.5.21) ottenendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

e quindi, tenendo presente la (1),

$$\lim_{x\to 0} h(x) = e^1 = e.$$

Passiamo al secondo limite. Quando $x \to +\infty$ sia il numeratore, sia il denominatore di questa frazione hanno limite $+\infty$. Possiamo ancora applicare la regola di de l'Hôpital, nella versione relativa a questa situazione (cfr.5.22) ottenendo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$$

e quindi, tenendo presente la (1),

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = e^0 = 1.$$

A proposito del calcolo di $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, osserviamo che è possibile seguire un metodo diverso. Posto $x = \frac{1}{y}$ il limite in oggetto si trasforma in

$$\lim_{y\to(\pm)\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y;$$

questo è un limite notevole; il suo valore (sia per $y \to +\infty$, sia per $y \to -\infty$) è e, come avevamo calcolato sopra.

Anche il $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$, che vale 1, come si è calcolato, figura in generale nella "lista dei limiti notevoli" (cfr.5.7).

Quesito 6

Si deve discutere l'eventuale esistenza di soluzioni non banali di un sistema lineare omogeneo, in funzione di un parametro che figura nei coefficienti del sistema.

Un sistema lineare omogeneo "quadrato", cioè con uguale numero di equazioni e di incognite, ha come unica soluzione la soluzione

nulla se e solo se la matrice dei coefficienti ha il determinante diverso da zero.
Nel caso attuale il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = k\left(k^2-1\right)-\left(k-1\right)+\left(1-k\right) = \left(k-1\right)\left(k^2+k-2\right) = \left(k-1\right)^2\left(k+2\right)$$

Questo è uguale a 0 quando $k=1$ oppure $k=-2$. Se k assume uno o l'altro di questi valori, il sistema ha ulteriori soluzioni, oltre a quella nulla; invece, se k è diverso sia da 1, sia da –2, l'unica soluzione del sistema è (0,0,0).
L'affermazione del testo del quesito è dunque falsa, perché non considera il valore $k=-2$ tra quelli che danno luogo a soluzioni non nulle.

Quesito 7

La questione geometrica proposta (area di un'ellisse) può essere risolta in vari modi; ne esponiamo alcuni.

La formula che fornisce l'area di un'ellisse con semiassi noti, di misure a e b è

(1) $$\textit{Area ellisse} = \pi ab.$$

La (1) può essere dimostrata in vari modi; vediamone alcuni.

1) Con calcolo integrale.
L'equazione dell'ellisse con semiassi a e b, rispetto a un sistema di riferimento con origine nel centro dell'ellisse e assi disposti lungo gli assi dell'ellisse è (cfr.3.24)

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Da (2) si può ricavare:

$$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{e quindi} \quad y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.$$

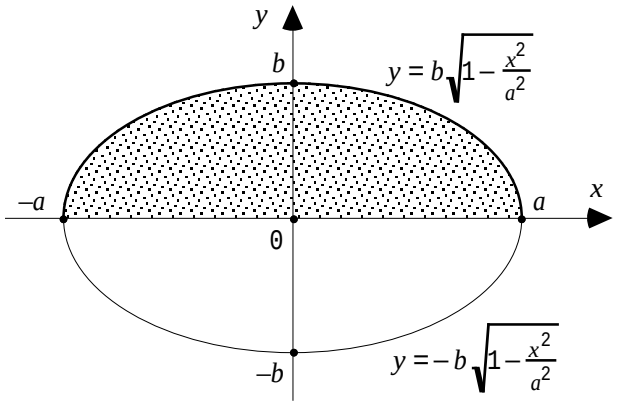


figura 10

Ciascuna delle due alternative date dal «±» rappresenta uno dei due archi di ellisse, situati uno sopra l'asse y, l'altro sotto (figura 10).
L'area dell'ellisse è doppia di quella delimitata tra l'arco superiore e

l'asse delle ascisse; perciò (cfr.5.29)

$$(3) \qquad \textit{Area ellisse} \;=\; 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \;=\; 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Per il calcolo dell'integrale $\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ conviene effettuare il cambiamento di variabile $\frac{x}{a}=\operatorname{sen} t$, ovvero $x=a\operatorname{sen} t$, da cui segue $dx=a\cos t\,dt$.

Un intervallo di valori di t nel quale $x=a\operatorname{sen} t$ assume tutti i valori fra $-a$ e a è $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Perciò

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\;a\cos t\,dt=a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt\;;$$

quando $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ è $\cos t\geq 0$, quindi $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$. L'integrale scritto sopra diventa

$$a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt \;=\; \frac{a}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1+\cos(2t)\big)\,dt \;=\; \frac{a}{2}\left[t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{a\pi}{2}$$

(nel primo passaggio abbiamo applicato la formula di bisezione per il coseno, cfr.4.25 oppure 4.39).

Sostituendo questo risultato in (3) otteniamo

$$\textit{Area ellisse} \;=\; 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \;=\; 2b\cdot\frac{a\pi}{2} \;=\; \pi ab$$

come si voleva dimostrare.

L'integrale $\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$ si poteva calcolare più semplicemente con un'astuzia "geometrica". Si può scrivere

$$(4) \qquad \int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \;=\; \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Ebbene, l'equazione $y=\sqrt{a^2-x^2}$ rappresenta la semicirconferenza col centro in (0,0) e raggio a, situata nel semipiano $y\geq 0$ (figura 11).

L'area della semicirconferenza vale $\frac{1}{2}\pi a^2$; perciò da (4) abbiamo

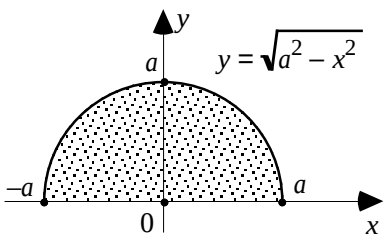


figura 11

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{\pi a}{2},$$

come avevamo già trovato per altra via.

2) Con affinità che muta l'ellisse in un cerchio.

L'affinità T di equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a} \\ y' = \frac{y}{b} \end{cases}$$

trasforma l'ellisse di equazione (2) nel cerchio di equazione

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

con centro in (0,0) e raggio 1. L'area di questo cerchio è π.

D'altra parte, il determinante della matrice dei coefficienti di x e y nelle equazioni dell'affinità T è

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{ab}$$

Perciò T trasforma una figura di area A in una figura di area $\frac{1}{ab}\cdot A$ (è lo stesso argomento che abbiamo applicato nella domanda **e)** del problema 2 di questo compito).

In particolare, se A è l'area (incognita) dell'ellisse, l'area del cerchio in cui questa viene mutata da T deve essere $\frac{1}{ab}\cdot A$; perciò

$$\frac{1}{ab}\cdot A = \pi\,; \qquad A = \pi a b$$

come si voleva dimostrare.

Quesito 8

Si debbono determinare i valori di due parametri affinché una certa affinità sia una similitudine diretta, e trovare il punto unito di questa. Se si conoscono le necessarie regole non ci sono sostanziali difficoltà di concetto; occorre però prestare attenzione ai calcoli.

Un'affinità di equazioni

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + c \\ y' = \gamma x + \delta y + d \end{cases}$$

è una similitudine diretta se e solo se

$$\alpha = \delta \qquad \text{e} \qquad \beta = -\gamma\,.$$

Queste relazioni applicate al caso attuale, cioè all'affinità di equazioni

(2) $$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

danno quanto segue:

$$\begin{cases} a+1 = 2b \\ -b = -a+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 2b-1 \\ -b = 1-2b+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Tali valori, sostituiti in (2), forniscono le equazioni

(3) $$\begin{cases} x' = 4x - 2y + 3 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$$

che rappresentano la similitudine diretta da noi cercata.
Il ragionamento per giungere alla (3) si può anche impostare diversamente, facendo riferimento a una caratterizzazione delle similitudini che vale anche in dimensione superiore a 2; i calcoli risultano però assai più laboriosi, ed è dunque consigliabile procedere come esposto sopra.
Per completezza, riportiamo anche lo svolgimento con l'altro metodo.
Un'affinità di equazioni (1) è una similitudine (per ora non si distingue se diretta o indiretta) se e solo se il prodotto della matrice dei coefficienti, $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, per la sua trasposta $M^T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ è della forma

(4) $$\begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

cioè: valori positivi uguali sulla diagonale principale, e zero nelle altre posizioni; in particolare, se $k^2=1$ si ha una isometria; $|k|$ è il *rapporto di similitudine*, cioè il fattore costante di dilatazione (o contrazione) delle lunghezze ad opera della trasformazione.
Nel caso attuale è $M = \begin{pmatrix} a+1 & -b \\ a-1 & 2b \end{pmatrix}$, quindi

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} a+1 & -b \\ a-1 & 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ -b & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1)^2 + b^2 & a^2-1-2b^2 \\ a^2-1-2b^2 & (a-1)^2 + 4b^2 \end{pmatrix}$$

Per avere una similitudine bisogna quindi che sia

(5) $$\begin{cases} (a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + 4b^2 \\ a^2 - 1 - 2b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 4a - 3b^2 = 0 \\ a^2 - 1 - 2b^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima di (5) ricaviamo $b^2 = \frac{4}{3}a$; sostituiamo nella seconda e

troviamo l'equazione risolvente:

$$a^2 - 1 - \frac{8}{3}a = 0\,; \quad 3a^2 - 8a - 3 = 0\,; \quad a = \frac{4 \pm 5}{3}\,; \quad a = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$$

Con $a = -\frac{1}{3}$ si ha $b^2 = -\frac{4}{9}$, impossibile; con $a = 3$ si ha $b^2 = 4$, e quindi $b = \pm 2$.
Le matrici M corrispondenti a questi valori di a e b sono:

$$con\ \ a = 3\ e\ b = 2, \quad M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad con\ \ a = 3\ e\ b = -2, \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi si hanno similitudini. Tuttavia, con $a = 3$ e $b = -2$ risulta $\det M = -20 < 0$; si tratta quindi di una similitudine *indiretta*; invece con $a = 3$ e $b = 2$ risulta $\det M = 20 > 0$, quindi la similitudine è diretta, ed è quella rappresentata dalle equazioni (3), già trovata sopra.

Il punto unito della similitudine di equazioni (3) si ricava risolvendo il sistema che esprime l'uguaglianza $T(x, y) = (x, y)$; in pratica, si risolve il sistema (3) in cui x' e y' vengono sostituiti da x e y. Si ottiene:

$$\begin{cases} x = 4x - 2y + 3 \\ y = 2x + 4y - 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{3}y \\ \frac{13}{3}y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{7}{13} \\ y = \frac{9}{13} \end{cases}.$$

Il punto unito è $P\left(-\frac{7}{13}, \frac{9}{13}\right)$.

Quesito 9

Tre facili esercizi sul calcolo delle probabilità; i primi due pressoché ovvi. Il terzo esercizio suggerisce alcune riflessioni.

a) Poiché la prima pallina estratta viene rimessa nell'urna prima della seconda estrazione, non ha alcuna importanza di quale colore fosse. Apprestandosi alla seconda estrazione, nell'urna ci sono 18 palline bianche fra le $18 + 12 = 30$ palline complessivamente contenute nell'urna. La probabilità di estrarre una pallina bianca è pertanto

$$P_1 = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

b) Se la prima pallina estratta non viene rimessa nell'urna, il suo colore condiziona lo svolgimento della seconda estrazione, perché la composizione dell'urna cambia in relazione al colore della prima estratta. Se questa è bianca, nell'urna rimangono 29 palline, delle quali 17 bianche. La probabilità di estrarre una pallina bianca è

pertanto

$$P_2 = \frac{17}{29}.$$

c) L'approccio ingenuo (ma pure corretto) a questo problema è il seguente: la probabilità di ottenere una pallina bianca alla seconda estrazione cambia in relazione all'esito della prima estrazione. Per questa ragione consideriamo probabilità condizionate.
Siano A, B gli eventi:

A: «*la prima pallina estratta è bianca*»
B: «*la seconda pallina estratta è bianca*»

Indichiamo poi con $\overline{A}$ l'*evento contrario* di A, cioè, nel nostro caso

$\overline{A}$: «*la prima pallina estratta è nera*»

Per i Teoremi della probabilità totale e composta si ha

$$P(B) = P(BA) + P(B\overline{A}) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\overline{A})\cdot P(\overline{A}) =$$
$$= \frac{17}{29}\cdot\frac{18}{30} + \frac{18}{29}\cdot\frac{12}{30} = \frac{18}{30}\left(\frac{17}{29}+\frac{12}{29}\right) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

È uscito lo stesso risultato della domanda ***a)***. In effetti, riflettendo meglio sul problema, si capisce che questo risultato era prevedibile. Infatti se non sappiamo di quale colore è la prima pallina estratta, le informazioni a nostra disposizione quando ci apprestiamo alla seconda estrazione dicono soltanto che avremo in mano una qualunque fra 30 palline, delle quali 18 sono bianche e 12 nere.
Nei problemi di calcolo delle probabilità, ciò che conta non è tanto quello che è avvenuto, ma ciò di cui siamo a conoscenza: possiamo, per esempio scommettere sull'esito di una partita di calcio che è già stata giocata, purché non ne conosciamo il risultato.

Quesito 10

È richiesto un algoritmo per la risoluzione di un'equazione di secondo grado, dati i coefficienti. Questo si può realizzare molto semplicemente; qui proponiamo un programma Pascal per questo scopo; l'algoritmo seguito è concepito in modo da minimizzare gli errori di arrotondamento nel calcolo automatico. La questione degli errori di arrotondamento è illustrata sommariamente nello svolgimento che segue.

Come è noto dall'algebra elementare, la condizione affinché l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ abbia radici reali è che $\Delta = b^2-4ac$ sia maggiore o uguale a zero. In tal caso le due soluzioni sono:

- distinte, della forma: $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$, se $\Delta > 0$
- coincidenti, della forma: $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ se $\Delta = 0$.

L'algoritmo richiesto, che presentiamo realizzato in un programma scritto in Turbo Pascal, ricevuti i tre valori di *a*, *b* e *c*, e controllato che sia $a \neq 0$, stabilisce il segno del discriminante Δ e calcola le soluzioni nel caso siano reali.
La forma delle soluzioni, utilizzata nel programma nel caso $\Delta > 0$ differisce però in parte da quella (nota a tutti gli studenti) sopra riportata. Questo per evitare possibili "errori di cancellazione" durante il calcolo. Per capire di che cosa si tratta, ricordiamo brevemente il problema della rappresentazione dei numeri reali negli elaboratori elettronici.
Allo scopo di sfruttare al massimo la memoria disponibile, tutti gli elaboratori utilizzano la rappresentazione in virgola mobile: se utilizziamo per semplicità la base 10 (gli elaboratori utilizzano basi diverse, ma il principio è il medesimo), ogni numero viene rappresentato nella forma:

$$x = a \cdot 10^b,$$

con *b* intero (detto esponente) e $|a| < 1$ (*a* è chiamata mantissa).
Se poi si aggiunge la condizione che $\frac{1}{10} \leq |a| < 1$ tale rappresentazione è unica, e viene detta "rappresentazione in virgola mobile normalizzata".
Per esempio, il numero 1342 viene rappresentato nella forma $0.1342 \cdot 10^4$, il numero 0.007 nella forma $0.7 \cdot 10^{-3}$ e il numero 12.108 nella forma $0.12108 \cdot 10^2$. Quest'ultimo numero scritto invece come $1.2108 \cdot 10^1$ sarebbe scritto ancora in "virgola mobile", ma non in forma normalizzata.
Ora è evidente che in questo modo si può rappresentare esattamente solo un numero finito di numeri (i cosiddetti *numeri macchina*) perché, in ciascun calcolatore, l'esponente *b* non può superare un certo valore e così pure il numero delle cifre decimali di *a*. Se il numero massimo di cifre della mantissa è *n*, per rappresentare un numero avente mantissa con più di *n* cifre decimali un calcolatore dovrà necessariamente operare un arrotondamento. Questi errori di arrotondamento possono generare problemi molto seri in fase di esecuzione di un programma, specialmente se valori già arrotondati (e quindi già affetti da un errore) vengono riutilizzati dal programma stesso.
Si dicono errori "di cancellazione" quelli che si verificano nel modo

seguente: consideriamo due numeri x e y rappresentati in virgola mobile normalizzata dei quali si debba calcolare la differenza; abbiamo già detto che se tali numeri hanno mantissa con più di n cifre decimali essi vengono arrotondati. Supponiamo ora che x e y non siano tanto diversi tra di loro: in tal caso la loro differenza sarà affetta da un errore relativo piuttosto elevato. Per chiarire meglio quanto può accadere vediamo un esempio.
Consideriamo i due numeri $x = 0.19087656985$ e $y = 0.190874305$; se supponiamo $n = 8$, il calcolatore rappresenterà tali numeri come

$$x = 0.19087657 \quad \text{e} \quad y = 0.19087431.$$

Avremo allora $x - y = 0.22600000 \cdot 10^{-5}$; questo calcolo attribuisce alla differenza tra x e y una mantissa che ha nulle le ultime 5 cifre decimali, mentre la differenza esatta tra x e y vale $k = 0.22648500 \cdot 10^{-5}$. Le cifre 4,8,5 della mantissa si sono perdute (per questo l'errore è detto "di cancellazione") e l'errore assoluto che ne consegue è pari a $0.00048500 \cdot 10^{-5}$; l'errore relativo (pari al rapporto tra l'errore assoluto e il valore esatto) è $E_r(x-y) = \frac{0.00048500 \cdot 10^{-5}}{0.22648500 \cdot 10^{-5}} \approx 0.002$ mentre l'errore relativo iniziale, dovuto per esempio all'approssimazione di x era soltanto:
$E_r(x) = \frac{|0.19087656985 - 0.19087657|}{0.19087656985} \approx 0.000000000786$.

Quando si scrive un programma che esegue calcoli di questo genere si dovrebbe sempre scegliere, tra formule equivalenti, quella che evita quei passaggi che possono portare alla cancellazione

Torniamo ora all'algoritmo per il calcolo delle soluzioni reali di un'equazione di secondo grado.
Poniamoci nel caso di $\Delta > 0$, e supponiamo per esempio $b > 0$; in tal caso il calcolo della soluzione $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ richiede di valutare una differenza che può dare origine ad errori di cancellazione (se b e $\sqrt{\Delta}$ differiscono di poco); se invece $b < 0$ l'altra soluzione può essere affetta da tali errori. Per evitare questo viene usata la formula risolutiva solo nel calcolo della soluzione "più sicura", mentre l'altra soluzione viene ricavata dividendo il prodotto delle due radici (calcolabile come $\frac{c}{a}$) per la prima soluzione.

```
program quesito_10;
uses crt;
var
 a,b,c,delta,x1,x2:real;
```

```
begin
 clrscr;
 repeat
  writeln('Introduci il coefficiente a, diverso da zero,
                                        dell''equazione');
  readln(a);
 until a<>0;
  writeln('Introduci il coefficiente b dell''equazione');
  readln(b);
  writeln('Introduci il coefficiente c dell''equazione');
  readln(c);
  writeln;
  delta:=b*b-4*a*c;
  if delta<0 then writeln('L''equazione non ha soluzioni
                                                  reali');
  if delta=0 then writeln('L''equazione ha due soluzioni
              reali e coincidenti pari a ',-b/(2*a):0:11);
  if delta>0 then
   begin
    if b>=0 then
      x1:=(-b-sqrt(delta))/(2*a)
    else
      x1:=(-b+sqrt(delta))/(2*a);
    x2:=c/(a*x1);
    writeln('L''equazione ha due soluzioni reali e
                                          distinte:');
    writeln('x1=',x1:0:11,'  e  ','x2=',x2:0:11);
   end;
 readln;

 end.
```